Opgaveformulering

Redegør for perioden 340 – 280 f.kr. med særligt fokus på forholdene for Euklid i Alexandria, ligesom også centrale elementer i græsk videnskab inddrages.

Indfør Euklids Elementer. Du skal bl.a. komme ind på strukturen i bøgerne, og begreber som aksiomer, postulater, definitioner og deduktion. Gennemgå i detaljer 2 af de første sætninger i bog 1 i Elementerne. Desuden ønskes Euklids bevis for konstruktionen af det gyldne snit behandlet.

Analyser og vurdér Elementernes indflydelse i den sene middelalder og overgangen til renæssancen.

Opgaven skal fylde mellem 15 og 20 sider excl. tabeller, figurer og grafer.

Fag: Matematik A og Historie A

Bemærkning: Sideangivelser er korrekte i originale opgave

Indholdsfortegnelse

Indledning

Antikkens Grækenland husede nogle af de største tænkere, vi har haft siden tidernes morgen, såsom Platon og Aristoteles, hvis filosofilære stadig runger verden over i dag. Det er dog ikke kun den karakteristiske filosofi, grækerne huskes for, men også andre lærde, der har været kendetegnende for fremtidig videnskab. En af disse lærde var matematikeren *Euklid*, hvis hovedværk *"Elementer-ne"* var banebrydende inden for det matematiske område, og det er netop Euklid og hans "Elemen-terne," der er fokus for denne opgave.

I den første del af opgaven gøres der rede for perioden 340 – 280 f.Kr. i antikken med særligt fokus på forholdene for Euklid i Alexandria, samt inddrages andre centrale elementer i gammel græsk videnskab såsom en del af den filosofi, der dannede basis for Euklids arbejde.

Dernæst indføres "Elementerne" i opgaven, hvor Euklids matematiske metode vil være i fokus. Herunder vil strukturen i bøgerne blive undersøgt og begreber som aksiomer, postulater, definitio-ner og deduktion vil blive forklaret. Desuden gennemgås beviserne for de to første sætninger i Euk-lids bog I i detaljer, samt beviset for en af Euklids mere avancerede konstruktioner, nemlig det gyldne snit.

Til sidst analyseres og vurderes "Elementernes" indflydelse senere i tiden, nemlig i perioden om-kring senmiddelalderen og overgangen til renæssancen, herunder med fokus på de områder, hvor "Elementerne" gjorde sig gældende i denne tidsperiode.

Antikken i 340 f.Kr. – 280 f.Kr.

Perioden mellem 340 f.Kr. og 280 f.Kr. går ind under den antikke tidsperiode, der bliver betegnet som *hellenistisk tid.* Hellenismen er i dag betegnelsen for den kultur og tænkning, der efterfulgte den klassisk græske, og den strækker sig i tid fra Alexander den Store (356-323 f.Kr.) frem til ro-mersk kejsertid ved Augustus, 31 f.Kr.[1] Det var en tid, hvor Alexander den Store skabte et kortva-rigt verdensrige, hvor verdens kulturelle midtpunkt flyttede sig fra Athen til Alexandria, og hvor brugen af naturvidenskab opblomstrede. Det var også i denne periode, at Euklid (325 – 265 f.Kr.) levede og skrev sit berømte værk "Elementerne" omkring 300 f.Kr. Nu gøres der rede for denne del af den hellenistiske tid, altså perioden mellem 340 f.Kr. og 280 f.Kr. med fokus på forholdene for Euklid i Alexandria, men også med inddragelse af den græske videnskab, der kom forud for Euklid i form af Platons og Aristoteles' filosofi.

---

[1] "Europæisk Idéhistorie" s. 47

Kort om Grækenland inden 340 f.Kr.

Grækenland havde sin storhedstid fra ca. 500 f.Kr. til 340 f.Kr., altså ca. *klassisk tid.* Det var inden for denne periode, at demokratiet i Athen og andre græske poleis (bystater) blev videreudviklet for til sidst at blive stabiliseret i det 5. århundrede f.Kr..[2] Athen havde af samme årsag været den politisk såvel som kulturelt førende by i lange perioder. Desuden husede Athen også nogle af datidens store tænkere, som Platon (ca. 427-347 f.Kr.) og Aristoteles (384-322 f.Kr.). Værd at nævne er også perserkrigene, der er den samlede betegnelse for de krige og slag, der udspillede sig mellem Grækenland og Perserriget mellem ca. 492 - 449 f.Kr. samt de peloponnesiske krige mellem rivalerne Athen og Sparta i både 462 – 446 f.Kr. og i 431 – 404 f.Kr. Efter disse krige var Athen i længden hverken i stand til at holde sammen på de græske stater eller til at hævde sin stilling over for de omgivende ikke-græske stater og kunne altså ikke fungere som førerstat i middelhavsområdets storpolitik mere. Der fulgte først en periode mellem 404 – 371 f.Kr. hvor Sparta var førerstaten, hvorefter Theben overtog posten mellem 371 – 362 f.Kr.[3]

Byerne i det mellemste og sydligste Grækenland var blevet mere afhængige af Makedonien i løbet af 300-tallet,[4] og mellem 362 – 338 f.Kr., altså i de ca. 24 år op til den periode, vi fokuserer på, var Makedonien førerstaten i middelhavsområdet. Fillip II var konge af Makedonien fra 355 f.Kr.,[5] og ved at skabe en enormt stærk hær og dermed gøre Makedonien til en militær stormagt, dannede han basis for det storrige, der gik i arv til hans egen søn, Alexander den Store.

Alexander den Store og Alexandria

Alexander den Store levede i 356 – 323 f.Kr. og blev konge af Makedonien efter sin far i 336 f.Kr., hvilket han vedblev at være helt frem til sin død. De græske stater var allerede blevet underlagt Makedonien under Fillip II, og sammen dannede de et storgræsk forbund, som under Alexanders ledelse genoptog den gamle krig mod perserne. De felttog, Alexander sammen det græske storforbund foretog mod perserne og store dele af den østlige middelhavsverden, endte succesfuldt, og snart havde Alexander erobret Lilleasien, Syrien, Egypten, Babylonien og Persien, som alle kom under græsk herredømme.[6] Disse udgjorde tilsammen Alexander den Stores storrige, som dog havde en kort levetid, idet riget efter hans død blev delt i fem dele og tilfaldt Alexanders generaler. Resultatet

[2] "Grækenlands Historie" s. 105
[3] "Grækenlands Historie" s. 152-155
[4] "Antikken" s. 144
[5] "Grækenlands Historie" s. 156
[6] "Antikken" s. 144

var derefter, at Perserriget var knust, de græske poleis var blevet opløst, og kontakten mellem øst og vest var i kraftig vækst.

Alexander havde haft den anerkendte filosof Aristoteles som lærer, hvilket havde bevirket, at Alexander var blevet dybt inspireret af grækernes kultur. Hans vision var et verdensomspændende statsforbund, som skulle være præget af den græske kultur og ånd, og derfor medførte hans felttog også en heftig udbredelse af de græske værdier. Alexander forsøgte blandt andet at realisere sin vision ved at forene de forskellige dele af sit rige via handel, og derfor grundlagde han en række nye byer og skabte infrastruktur i form af nye veje, havne, broer og fyrtårne. Det er netop den blandingskultur af østligt og vestligt, der opstod i takt med den øgede handel, vi kalder *hellenistisk.*[7]

En af de nye byer, Alexander grundlagde, var den store by *Alexandria* i Egypten. Alexandria blev hurtigt den hellenistiske verdens nye kulturelle centrum, hvor det tidligere havde været Athen. De første ptolemæerkonger (De egyptiske konger mellem 305 – 30 f.Kr.[8]) var betydelige tilhængere af litteratur og kunst, hvilket betød, at de brugte store summer på at anlægge et bibliotekskompleks kaldet *Mouseion* i Alexandria samt på at indkøbe skrifter dertil. Dette bibliotek udviklede sig imidlertid til en forsknings- og læreinstitution, der blev samlepunktet for hellenismens lærde i form af astronomer, geografer, biologer, matematikere, landmålere, læger og teknikere, og da antallet af indsamlede skrifter på biblioteket var på sit højeste, skulle det have rummet over en halv million skrifter. Samlingen af al den gamle græske videnskab og filosofi gjorde det muligt for de lærde at gennemgå og bearbejde samtlige idéer inden for videnskaben og filosofien, der havde været gennem de sidste århundreder. Det er blandt andet grundet de lærdes arbejde med systematisk at sortere, udvælge og kopiere oldgamle værker, at vi i dag kan læse antikke tekster såsom Odysseus og Iliaden. [9] Således blev Alexandria altså også det intellektuelle samlingssted i verden under hellenismen.

Euklid, Matematik og Videnskaben

En af de betydningsfulde lærde, der var kommet til Alexandria under denne periode, var Euklid. Euklid levede omkring 330 – 270 f.Kr. og var en af antikkens største matematikere. Det er ikke meget, man ved om Euklid i dag, men man mener, at han har modtaget sin matematiske lære i Athen fra Platons elever på Platons Akademi, da mange af de matematikere, hvis arbejde Euklid byggede sit værk *"Elementerne"* på, havde gået på denne skole.[10] Derudover ved man med sikkerhed, at

---

[7] "Antikken" s. 144-145
[8] "Ptolemæer"
[9] "Antikken" s. 148-149
[10] "Euclid" s. 2

Euklid underviste på Mouseion, og at han er forfatter til et af de vigtigste værker inden for geometrien, nemlig *"Elementerne,"* som vil uddybes senere i opgaven.

Matematik var en af de mest dyrkede videnskaber i Alexandria, og netop Mouseion udgjorde en væsentlig forudsætning for, at matematikken kunne udvikle sig. For det første satte de første ptolemæer som nævnt litteraturen højt, og derfor indkøbte de en samling af de bedste skrifter fra det klassiske Grækenland, det oldgamle Egypten samt de gamle hebraiske og babylonske tekster, og faktisk instruerede ptolemæerne også søkaptajnerne i at søge nye bøger, når de var ude i verden.[11] Det gav de lærde mulighed for at bearbejde al den tidligere videnskab og filosofi, og matematikerne fik altså rig mulighed for at videreudvikle tidligere matematiske tanker. For Euklid betød det blandt andet, at han havde adgang til alle de tidligere tanker og idéer, som han har sammenfattet og bygget "Elementerne" på. For det andet skabte Mouseion et miljø, der lod de lærde, derunder matematikerne, studere i en intellektuel atmosfære, der ikke var præget af hverken politiske eller religiøse retninger.[12] Der var altså heller ingen begrænsninger for de videnskabelige studier, der blev udviklet inden for Mouseion.

Ud over matematikken var geografi, astronomi og medicin nogle af de mest dyrkede videnskaber i Alexandria under hellenismen, og især astronomerne og geograferne arbejdede tæt sammen. Derudover spillede matematikken i form af geometrien også en væsentlig rolle i samarbejdet, da man på baggrund af praktiske jordmålingsteknikker udviklede en mere teoretisk avanceret jordmålingskunst, hvor der var mere fokus på den geometriske form frem for materialet i jorden.[13] Matematikerne i Alexandria lærte desuden at værdsatte såkaldte "kanoner," altså forskrifter om "det skønne" i form af ideelle figurer, og derfor søgte de at skabe mere harmoniske mønstre i sine matematiske beviser samt at udtrykke skønheden visuelt i geometriske former.[14]

Platon, Aristoteles og Filosofien

Når man snakker oldgræsk videnskab, er filosofien et emne, der er svært at komme udenom. Platon, der levede ca. 427-347 f.Kr. og hans elev Aristoteles, der levede 384-322 f.Kr. var to af antikkens mest betydningsfulde filosoffer, og selvom ingen af dem huskes som matematikere i dag, så dannede deres filosofi basis for grækernes senere revolutionerende matematik. Platons akademi var blandt andet centeret for matematik- og filosofistudier i Athen, før Alexandria blev det nye intellektuelle

[11] "C.o.M." s. 95
[12] "C.o.M" s. 94
[13] "Antikken" s. 149-150
[14] "C.o.M" s. 95

samlingspunkt, og Platon havde sågar indskrevet følgende over indgangen til sit akademi: *"Lad ingen uden kendskab til geometri få adgang her."*[15]

Både Platon og Aristoteles bidrog til at udvikle den metode for geometriske beviser, Euklid benytter sig af, selvom begge filosoffer hører til tiden før Euklid og hellenismen. Selve metoden uddybes senere, men meget groft sagt går den ud på at bevise en påstand ved logisk argumentation. Platon ville gerne have udviklet denne teori for beviser, da han ønskede en modsætning til "sandsynlighed og mening." Platon satte dog *dialektik* (en filosofisk metode, hvor man igennem en udveksling af påstande og modpåstande når frem til en konklusion)[16] højere end matematiske beviser, da han mente, at kun gennem dialektikken kunne man opnå erkendelse, da, lidt abstrakt formuleret, sandheden er sandere end matematikken.[17] Aristoteles afviste Platons teori om en verden af ideelle former og satte matematiske beviser højere end dialektikken. Han var især interesseret i logiske forhold, og derunder arbejdede han med netop logisk og deduktiv argumentation. Aristoteles var den første til at udvikle en "formel logik," også kaldet syllogisme, som er en slutningsteori, hvor man kun er interesseret i, hvad man kan udlede ud fra præmisserne, og derfor ikke sandheden/holdbarheden i samme.[18] Det er netop Aristoteles' teorier om disse argumentationsformer, som Euklid har baseret sit arbejde på.[19]

Euklids arbejde med blandt andet "Elementerne" bygger altså på tidligere græske matematikeres og filosoffers tanker og idéer, herunder Platons og Aristoteles'. Efter at det kulturelle centrum flyttede fra Athen til Alexandria, og ptolemæerne fik Mouseion opført, var forholdene for alle lærde perfekte til at studere og til arbejde videre på deres forgængeres idéer. Der var således mange forudsætninger for, at vi i dag kan læse Euklids "Elementerne," og det er netop det værk, hvis metoder og grundidéer, der er centrale i næste del af opgaven.

---

[15] "Horisonter s. 16"
[16] "Dialectic"
[17] "Q.E.D" s. 6
[18] "Logik"
[19] "C.o.M" s.43-44 + 95-96

Euklids ”Elementerne” (ca. 300 f.Kr.)

Vi har efterhånden fået slået fast, at ”Elementerne” af Euklid er et af de vigtigste værker, der nogensinde er blevet skrevet inden for matematikkens verden. Man mener, at ”Elementerne” blev til omkring 300 f.Kr., men originaludgaven eksisterer ikke længere.[20] De 13 bøger, som ”Elementerne” består af, er mere end summen af de tidligere matematikeres arbejde, den er bygget på, og har dermed overflødiggjort alle tidligere ”elementer,” altså grundlæggende geometriske læresætninger, der er blevet skrevet. Begrebet ”element” skal forstås som elementer i form af ”nødvendige dele” eller ”byggesten,”[21] men hvordan er Euklids ”Elementerne” egentlig bygget op og hvad er grundidéerne bag den? Nu indføres Euklids ”Elementerne” ved hjælp af ”Vol. I: Euclid: The Thirteen Books of the Elements,” som indeholder de to første af de i alt 13 bøger, ”Elementerne” dækker over. Denne del vil primært omhandle Euklids bog I, da det er i denne, at Euklids grundidéer bliver præsenteret.

Opbygningen af bøgerne: Definition, Postulat, Aksiom og Deduktion

”Elementerne” består af 13 bogruller, som kan inddeles i tre øvre kategorier, nemlig plangeometri (Bog I, II, III, IV, V samt X), Aritmetik, som egentlig betyder ganske almindelig regning (Bog VII, VIII og IX) og geometri i rummet, (Bog XI, XII og XIII)[22] og generelt omhandler de studiet af geometriske figurer såsom firkanter, cirkler, trekanter og linjer. Man kan næsten sige, at ”Elementerne” starter ”in medias res,” idet når man slår op på første side i bog I ikke finder en form for indledning eller forklaring til bogens videre indhold, men derimod overskriften *”Definitioner,”* hvorunder der selvfølgelig står en række af disse såkaldte definitioner.

Definitioner er et af nøgleordene i strukturen i ”Elementerne” sammen med andre begreber som *aksiomer* og *postulater,* da Euklid lavede et matematisk system for geometri, der indledes af netop de tre begreber. Tilsammen udgør de et meget præcist grundlag for geometrien.

Som det første i bogen er der 23 definitioner. Definitionerne er med til at præcisere betydningen af fx en linje eller et punkt, så man ikke er i tvivl om, hvilke objekter med hvilke funktioner, som der refereres til senere i bøgerne. De to første definitioner lyder: *”Et punkt er det, som ikke kan deles,”* og *”En linje er en længde uden bredde.”* og således fortsætter listen af definitioner med at definere flader, cirkler osv.[23]

[20] ”Matematik Historie” s. 28
[21] ”Q.E.D.” s. 7
[22] ”C.o.M” s. 110
[23] ”Euclid” s. 153-154 og “Q.E.D.” s. 53

Dernæst kommer Euklids fem *postulater.* Et postulat er en ubevist påstand, og Euklids fem postulater er altså geometriske påstande, der ikke kan bevises, men simpelthen antages for at være sande, idet de der ”selvindlysende.” De to første postulater lyder: *”Der kan trækkes en linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt.”* og *”En begrænset ret linje kan forlænges i en ret linje uden afbrydelse.”* [24] De tre første postulater bygger på konstruktioner med passer og lineal, hvilke var vigtige for grækerne, da disse værktøjer kunne overbevise dem om, at geometriske objekter eksisterede i den virkelige verden.[25]

Aksiomer, som kommer efter postulaterne, er en form for postulater og vice versa. Ligesom postulaterne er aksiomer også forudsætninger, der antages for at være sande, men som ikke kan bevises. Det, der adskiller aksiomerne fra postulaterne, er, at postulaterne omhandler geometriske påstande, mens aksiomerne dækker over mere ”almindelige begreber” såsom aksiom 2: *”Hvis lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er summerne lige store.”* eller aksiom 5 (senere aksiom 8): *”Det hele er større end en del af det.”*[26] Euklid lavede oprindeligt kun fem aksiomer, men man har senere tilføjet fire til, så der i dag er ni aksiomer i alt, når vi snakker Euklids geometri.

Når Euklid opstillede disse definitioner og ubeviste forudsætninger i form af aksiomer og postulater, var det som sagt grundlaget i et matematisk system, hvor resten bestod af såkaldte *sætninger.* Disse sætninger er blevet udledt ved den metode, man kalder *deduktion.* I begrebet ”deduktion” ligger betydningen: *”En logisk følgeslutning, hvor man slutter fra det almene til det specielle.”*[27] Man har altså nogle grundantagelser, hvorudfra man slutter en konklusion. Euklid dannede altså disse grundantagelser i form af sine postulater og aksiomer, hvorefter han sluttede omkring 467 ”konklusioner,” han kaldte sætninger eller, med finere ord, teoremer. Euklid udviklede denne aksiom-deduktive metode ud fra Aristoteles' tidligere teorier om logiske slutningsforhold.[28] Euklids metode adskiller sig selvfølgelig fra den formelle logik, idet sandheden i Euklids grundantagelser er væsentlige for hans arbejde.

”Elementerne” behandler altså geometrien ved deduktion ud fra sine postulater og aksiomer, som fører til en enorm mængde af sætninger. Euklids metode vil nu blive klargjort ved en gennemgang

---

[24] “Euclid” s. 195-202 og ”Q.E.D.” s. 54
[25] ”Horisonter” s. 17
[26] “Euclid” s. 222-232 og ”Q.E.D.” s. 54
[27] ”Deduktion”
[28] ”C.o.M” s. 109 + 95-96

af de to første sætninger i bog I, som omhandler trekanter og vinkler uden parallelle linjer, samt Euklids bevis for konstruktionen af *det gyldne snit.*

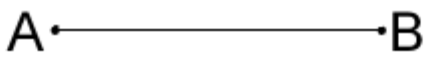
Sætning 1 i Euklids bog I[29]

Sætningen lyder: *"At konstruere en ligesidet trekant på en given begrænset ret linje."*

- Der følger af denne sætning altså et bevis for en metode til at konstruere en ligesidet trekant på en vilkårlig begrænset ret linje.

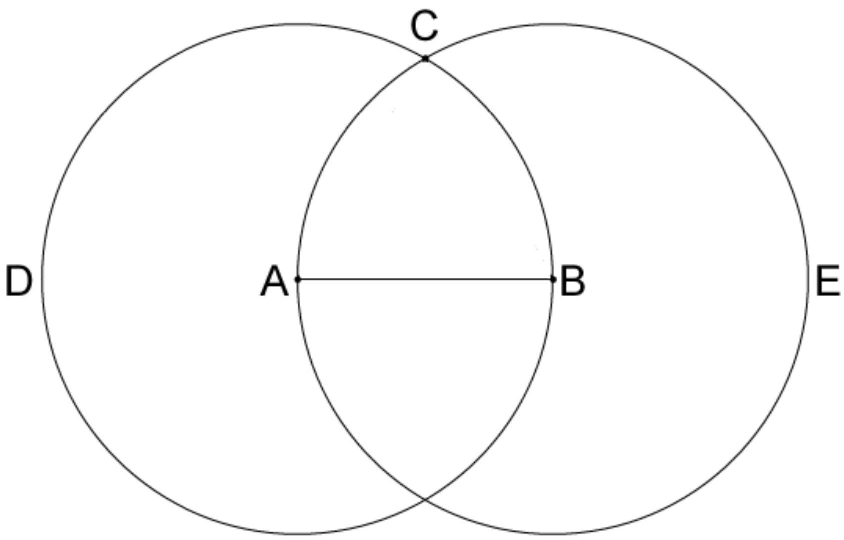
Bevis:

Vi har en vilkårlig ret linje, som vi kalder AB.



Dette er den "givne begrænsede linje" i sætningen, som vi vil konstruere en ligesidet trekant på.

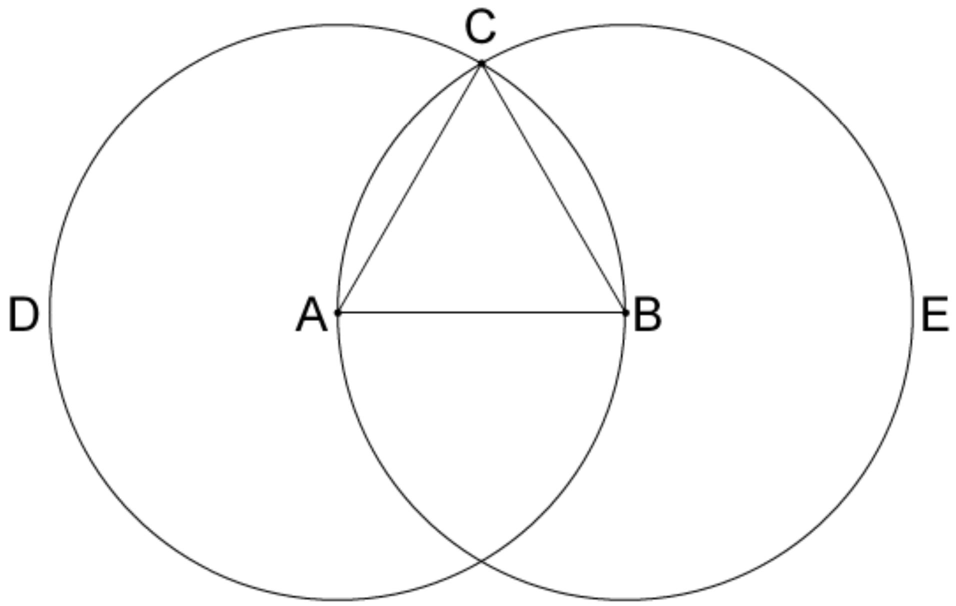
Nu går vi i gang med det egentlige arbejde, nemlig selve konstruktionen af den ligesidede trekant. Dette gøres ved, at vi tegner to cirkler således:



[29] "Euclid" s. 241 el. "Q.E.D." s. 54

Vi har ladet punktet A være centrum af cirklen BCD, punktet B er centrum af cirklen ACE, og linjen AB svarer til begge cirklernes radius. Dette kan man gøre grundet Euklids tredje postulat, som siger: ”*Der kan tegnes en cirkel med et hvilket som helst centrum og en hvilken som helst afstand som radius.”*

Som en sidste tilføjelse på vores figur indsætter vi to rette linjer, der går fra hhv. A til C, som er det øverste skæringspunkt for de to cirkler på tegningen, og fra B til C, hvilket man kan, når man henviser tilbage til det første postulat, der siger, at der kan trækkes en linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst punkt. Den endelige figur ser altså således ud:



Da punktet C ligger på cirklen CDB, hvor A er centrum, er linjen AC altså også lig radiussen AB, idet alle linjer, der trækkes fra cirklens centrum til et givent punkt på cirklens periferi, er lige lange ifølge definition 15. Det samme gælder for linjen BC, der altså også er lig AB, da B er centrum i cirklen ACE, på hvis periferi punktet C også ligger. Vi har altså |AC| = |AB| og |BC| = |AB|.

Hertil indfører vi så det første aksiom, der siger, at størrelser, der er lig en og samme tredje, er indbyrdes lige store, så idet både AC og BC er lig AB, må |AC| = |BC|. Alt i alt er |AB| = |AC| = |BC|, hvilket vil sige, at de tre linjer, AB, AC og BC er lige lange.

Det vil altså sige, at trekant ABC er ligesidet, idet en ligesidet trekant defineres som en trekant med tre lige lange sider ud fra definition 20, og denne blev konstrueret på vores vilkårlige rette linje AB. Q.E.D. (”*Quod erat demonstrandum*,” som betyder: ”*Hvilket skulle bevises.”)*[30]

[30] ”Q.E.D.” s. 3

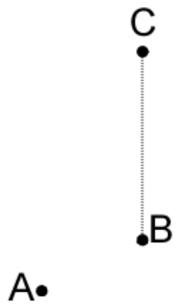
Sætning 2 i Euklids bog I[31]

Sætning 2 lyder: *"Ved et givet punkt at anbringe en ret linje, som er lig en given ret linje."*

- Vi vil altså bevise, at man kan anbringe en ret linje ud fra et givent punkt, som skal være magen til en anden ret linje, der er givet i forvejen. Denne gang vil jeg, for at undgå gentagelser, henvise tilbage til førnævnte definitioner, postulater og aksiomer i en parentes i stedet for at beskrive hver enkelte af disse.

Bevis:

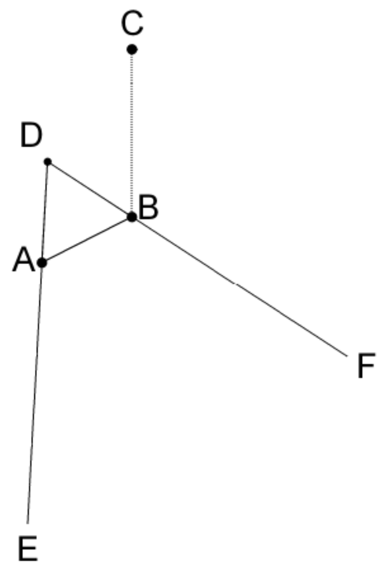
Vi lader et punkt A være det givne punkt i sætningen, og linjen BC lader vi være den givne linje:



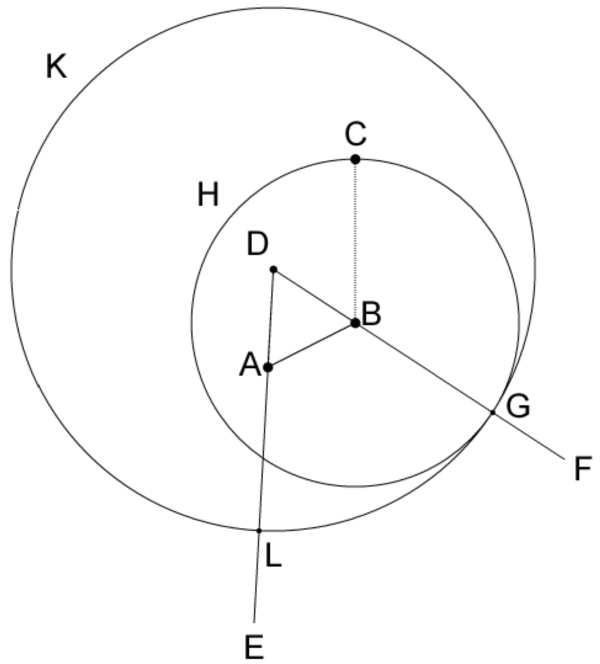
Der skal nu trækkes en ret linje fra punktet A, som er lig linjen BC.

Til at begynde med trækker vi en linje fra A til B (Post. 1), og på denne linje konstruerer vi en ligesidet trekant ABD med den metode, vi netop beviste i sætning 1. De to nye sider, der fremkommer ved den ligesidede trekant, nemlig AD og BD, forlænges med henholdsvis AE og GF. (Post. 2)

[31] "Euclid" s. 244 og "Q.E.D." s. 55



Dernæst vil vi tegne en cirkel CGH, hvor B er centrum, og BC er radius, samt en større cirkel GLK, hvor D er centrum, og DG er radius. (Post. 3 for begge udsagn):



Dette er vores endelige figur, hvorudfra vi kan konkludere at, da B er centrum i den mindre cirkel CGH, må linjen BC være lig linjen BG. (Def. 15) Desuden er D centrum i den større cirkel GLK, så linjerne DL og DG er altså også lig hinanden. Aksiom 3 siger endvidere, at hvis lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store, så idet de to sider AD og BD af den ligesidede trekant trækkes fra hhv. linjerne DL og DG, så er resterne AL og BG også lig hinanden. Vi har altså BC = BG og AL = BG, hvoraf der så følger, at BC = AL. (Aks. 1)

Vi har altså anbragt en ret linje AL fra vores givne punkt A, som er lig vores givne rette linje BC. QED.

Det Gyldne Snit (Sætning 11 i Euklids bog II)[32]

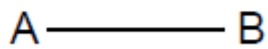
Sætningen siger*: "At dele en given ret linje således, at det rektangel, der indesluttes af hele linjen og det ene af stykkerne, er lig kvadratet på det andet stykke."*

- Vi skal altså dele en given ret linje i to dele således, at kvadratet på den største del er lig det rektangel, der indesluttes af hele den rette linje og den mindste af delene. Hvis vi fx har en given ret linje AB, som bliver delt i to stykker i punktet H, hvoraf stykket AH er den store del, og BH er det mindre stykke, så skal det på matematisk sprog altså gælde, at $|AH|^2 = |AB| * |BH|$.

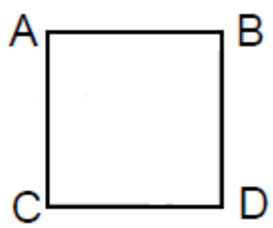
Til dette bevis bliver der ikke henvist tilbage til anvendte definitioner, postulater og aksiomer, men derimod kun de sætninger, der bliver benyttet igennem konstruktionen.

<u>Bevis:</u>

Vi lader linjen AB være vores givne rette linje, som vi vil dele i to stykker:

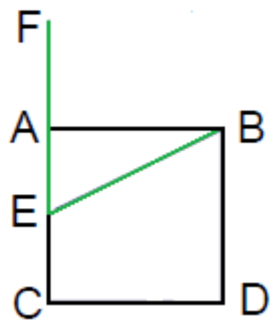


Vi begynder med at tegne et kvadrat ABDC på linjen AB:

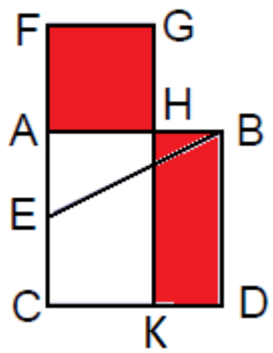


Derefter deler vi siden AC i to halve i punktet E, og fra dette punkt trækker vi en linje til B. Derefter forlænger vi så siden AC op til punktet F, således at linjen EF er lig EB:

[32] "Euclid" s. 403 og "Q.E.D." s. 94



Herefter kan vi så tegne et kvadrat på AF, hvor vi forlænger AF's parallelle side kaldet GH ned til linjen CD i punktet K:



Dette er så vores endelige figur. De to markerede områder er hhv. det kvadrat og det rektangel, vi vil påstå, er lig hinanden, og er altså H det punkt, vi skal dele linjen i for, at sætningen kan opfyldes.

Hvis vi ser tilbage på sætning 6 i bog II, så hedder denne: *"Hvis en ret linje halveres og en anden ret linje afsættes i forlængelse af den, så er det rektangel, der indesluttes af hele linjen med forlængelsen og forlængelsen, plus kvadratet på halvdelen, lig kvadratet på den rette linje, der er sammensat af halvdelen og forlængelsen."* Det følger altså i vores figur, at da den rette linje AC er halveret i E, og FA er sat i forlængelse af samme linje, så er rektanglet, der indesluttes af hele linjen med forlængelsen CF og forlængelsen FA, plus kvadratet på halvdelen AE lig kvadratet på EF, dvs.: $|CF| * |FA| + |AE|^2 = |EF|^2$

Så husker vi på, at EF er lig EB, hvoraf der så følger, at kvadratet på EB også er lig rektanglet, der indesluttes af CF og FA, plus kvadratet på AE, dvs. $|EB|^2 = |CF| * |FA| + |AE|^2$

Dernæst henviser vi tilbage til Euklids sætning 47 i Bog I, der siger: *"I en retvinklet trekant er kvadratet på den side, der ligger over for den rette vinkel, lig summen af kvadraterne på de sider, der indeslutter den rette vinkel."* I vores figur er der en trekant ABE at finde, hvor vinklen A er ret, så det gælder altså, at kvadratet på trekantens hypotenuse BE er lig summen af kvadraterne på de to kateter, AE og AB. Dvs.: $|EB|^2 = |AE|^2 + |AB|^2$.

EB var også lig rektanglet, der indesluttes af CF og FA, plus kvadratet på AE, hvilket således også er lig summen af kvadraterne på AE og AB. Derfor: $|CF| * |FA| + |AE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2$. Dernæst kan vi trække kvadratet på AE fra på begge sider af lighedstegnet, så vi har: $|CF| * |FA| = |AE|^2$ Altså er kvadratet på AE lig det rektangel, der indesluttes af CF og FA.

Vi kalder det rektangel, der indesluttes af CF og FA for FK, da $|FA| = |FG|$, og kvadratet på AB kalder vi AD. Da $FK = |CF| * |FA|$ og $AD = |AE|^2$, følger det altså, at FK er lig AD. Derefter trækker vi det fælles rektangel AK, der indesluttes af linjerne AC og CK, fra både FK og AD, så resterne er kvadratet FH og rektanglet HD, der dermed også er lig hinanden.

Til sidst ser vi, at rektanglet HD er indesluttet af AB og BH, da linjen AB også er lig linjen BD, altså er $HD = |AB| * |BH|$, og vi ser, at FH er kvadratet på AH, altså $FH = |AH|^2$. Derfor følger det at, da $HD = FH$, er $|AB| * |BH| = |AH|^2$.

Alt i alt har vi altså fået delt den givne rette linje AB i punktet H således at, det rektangel, der indesluttes af AB og BH, er lig kvadratet på AH. Nemlig $|AH|^2 = |AB| * |BH|$. QED.

Euklids Metode

For at opsummere Euklids metode til at lave beviser, så er anvendelsen af hans matematiske system tydeligt. I de to første beviser for Euklids to første sætninger finder man belæg for alt, der bliver tegnet og sluttet gennemgående ved henvisninger tilbage til de grundlæggende definitioner, postulater og aksiomer. Efterhånden som Euklid får bevist et solidt antal sætninger og når til de mere avancerede beviser og konstruktioner, såsom beviset for det gyldne snit, begynder han at henvise tilbage til tidligere sætninger, og disse sætningers beviser henviser muligvis også tilbage til andre sætninger, og således kan det fortsætte, indtil vi når til grundlaget for Euklids geometri i form af definitionerne, postulaterne og aksiomerne. Det er altså dette matematiske system i form af kæder af sætninger, der hænger sammen og dannes ud fra det samme grundlag, som gjorde Euklid til en af antikkens mest skarpsindige matematikere.

Derudover er det værd at lægge mærke til, hvordan Euklids metode adskiller sig fra vores nutidige matematiske metode. Euklid benytter sig af lange ”kringlede” formuleringer, hvilket sætningen for det gyldne snit er et udmærket eksempel på. Det er forholdsvist svært at forestille sig, hvad der menes med, ”at dele en given ret linje således, at det rektangel, der indesluttes af hele linjen og det ene af stykkerne, er lig kvadratet på det andet stykke," så i dag forenkler vi sådanne formuleringer ved at omskrive til algebra, ligesom vi omdannede denne sætning til: " $|AH|^2 = |AB| * |BH|$."

Som en afsluttende anekdote om "Elementerne" kan der fortælles, at den første ptolemæ efterlyste en lettere vej til geometrien end Euklids elementer, men som Euklid svarede: *"Der er ingen royal vej til geometri."*[33] Dette har vist sig at være rigtigt, idet ingen andre værker om geometri synes at have overgået "Elementerne," som stadig anvendes i geometrien i dag. Det er netop den effekt, som "Elementerne" havde på tiden mange århundreder efter sin oprindelse, der er central for sidste del af opgaven.

"Elementerne" i Senmiddelalderen og Overgangen til Renæssancen

I antikken havde man mange guder, men man gjorde ikke meget i teologiske studier. I middelalderen havde man til gengæld kun én gud, mens teologien prægede denne periode mere end nogensinde, og i renæssancen fik den naturvidenskabelige revolution sit gennembrud. Der synes umiddelbart at være en bred kløft mellem tro og faktisk viden, men er springet fra det at vide og at tro egentlig så stort endda? "Elementerne" var et af de mange videnskabelige værker fra antikken, der blev genopdaget under renæssancen, og det er netop dens effekt i en periode, hvor teologien synes vigtigere end viden, der er baseret på naturvidenskabelig fakta, der nu skal analyseres, altså "Elementernes" indflydelse i den sene middelalder og overgangen til renæssancen.

Troen i Middelalderen og Antikkens Genopdagelse

Middelalderen strækker sig ca. over årene 500 e.Kr. til 1350. Navnet "Middelalderen" kommer af, at det er en periode mellem to andre, antikken og renæssancen, hvis periodedefinerende højdepunkter fik middelalderen til at fremstå som en uinteressant mellemperiode, hvilket man senere har æn-

[33] "Euclid" s. 1

dret mening om grundet både teknologiske og kulturelle fremskridt i middelalderen, der har haft betydning for det Vesteuropa, vi kender i dag. [34]

I middelalderen begyndte rekonstruktionen af den viden, man havde indsamlet i antikken, men dette skete på middelalderens egne præmisser, som primært var blevet skabt af kristendommen og dens institutioner. I Europa besad kirken en enorm magt i middelalderens samfund, og den havde således nærmest monopol på al viden og lærde skrifter.[35] Derfor blev teologiske studier naturligvis prioriteret højere end naturvidenskabelige i mange år, og det var altså primært biblen, man underviste i, hvilket står i skarp kontrast til dengang i hellenismen, hvor de lærde studerede i et miljø, der ikke var begrænset af religion.

Antikkens genopdagelse begyndte med arabernes oversættelser af gamle græske værker. Efter Romerrigets sammenbrud i 400-tallet blev den klassiske kultur spredt for alle vinde, og dens værker blev opbevaret i forskellige lærdomsinstitutioner i de arabiske lande, fx Bagdad eller Cairo. Omkring år 800 begyndte arabiske lærde at indsamle og oversætte disse værker og i løbet af 200 år var en væsentlig andel af de gamle græske værker blevet oversat til arabisk, heriblandt ”Elementerne” af Euklid og værker af Aristoteles. Omkring år 1000 begyndte man endvidere at oversætte intensivt fra både græsk og arabisk til latin, som var de vesteuropæiske lærdes sprog i middelalderen, hvor det i antikken havde været græsk, og disse oversættelser begyndte hurtigt at cirkulere i Vesteuropa. [36] Således fandt ”Elementerne” sammen med en stor andel af den gamle græske viden altså frem til senmiddelalderens Vesteuropa.

Oprettelsen af Universiteter og Quadrivium

En af konsekvenserne af antikkens genopdagelse var grundlæggelsen af nye vesteuropæiske universiteter. Før havde undervisningen fundet sted på klosterskolerne, hvor man selvfølgelig underviste med en bibel i hånden. Fra det 11. århundrede begyndte der at opstå katedralskoler, der var tilknyttet domkirkerne, i storbyerne såsom Paris og Salamanca, og på disse skoler underviste man i de nye arabiske og græske oversættelser. Det blev hurtigt populært blandt de unge at blive undervist i antikkens oldgamle skrifter, så antallet af studerende voksede hastigt. Omkring år 1200 samlede de studerende i Paris sig i et universitet, hvilket katedralskolen i Paris havde dannet basis for. Dette universitetssystem bredte sig hurtigt gennem 1200- og 1300-tallet, og i år 1350 fandtes der omkring

[34] ”Tanken Magt” s. 239-241
[35] ”Renæssancen”
[36] ”Tankens Magt” s. 244-245

30 universiteter i Europa.[37] Det interessante ved universiteterne i forhold til Euklid er dog undervisningsformen.

Både på katedralskolerne og på universiteterne underviste man efter princippet på de syv *artes liberales,* altså "de frie kunster." Under disse indgik to fakulteter, nemlig *trivium,* hvilket handler om sprogbrug, og *quadrivium,* hvilket omhandler matematik. Under trivium indgik de tre kunster *grammatik, retorik, dialektik,* og ind under quadrivium indgik *aritmetik, geometri, astronomi* og *musik.* Dette syv artes-system fungerede som grundstammen i uddannelsen, hvor man bagefter kunne vælge at læse videre ved et af de lukrative fakulteter i form af medicin, kirkeret og teologi.[38]

Mange af de nyoversatte antikke skrifter blev anvendt som undervisningsmateriale i dette program, og i forbindelse med "Elementerne" er det selvfølgelig quadrivium-fakultetet, der er interessant. Faktisk havde "Elementerne" indflydelse på hele to af de syv kunster, nemlig aritmetik og geometri. Inden for aritmetikken blev Euklids bog VII til IX dog kun anvendt til at supplere de værker, som var mere grundlæggende for aritmetik. Til gengæld var "Elementerne" fundamentet inden for kunsten geometri, som var det væsentligste af de fire kunster under quadrivium. Hertil anvendte man bog I til VI, som omhandler almindelig plangeometri.[39] Euklids definitioner, aksiomer og postulater fungerede altså stadig som geometriens fundament mere end et årtusinde efter sin oprindelse.

Tro vs. Viden og Skolastik

Så hvad betød denne genopdagelse af gammel viden for kirken? Den tvang selvfølgelig kirken til at forholde sig til den gamle rationelle tankegang, men ville den genopdagede viden være til gavn eller ej for kristendommen? Et af de væsentligste temaer i den sene middelalder var modsætningsforholdet mellem tro og fornuft, hvilket det faktisk også var før antikkens rekonstruktion, hvor man kun havde adgang til ganske få værker af Aristoteles og Platon. Middelalderens første lærdomscentrer var opstået i 900-tallet i form af skoler, der var tilknyttet klostrene, altså de såkaldte klosterskoler, og det var netop den blanding af teologi, filosofi og sprog (latin), der udviklede sig på disse skoler, som vi kalder for *skolastik.*[40] Skolastikerne forsøgte at sammenkoble teologi og filosofi således, at man kunne løse problemet omkring skellet mellem tro og viden.[41]

---

[37] "Tankens Magt" s. 293 og "Scientific Europe" s. 24
[38] "Tankens Magt" s. 284 og 293
[39] "Foundations of Modern Science" s. 45-46
[40] "Filosofi" s. 62
[41] "Skolastik"

Skolastikerne tog sit udgangspunkt i Aristoteles, selvom man ganske vist kun underviste i to af hans værker til at begynde med. Derudover arbejdede man dog med andre værker, der var stærkt tilknyttet Aristoteles' teorier om logik. Aristoteles arbejde meget med syllogismer, og netop denne logiske argumentationsform blev anvendt i høj grad af skolastikerne. Efter at konklusionen er sluttet ud fra præmisserne, tog skolastikerne så skridtet videre, og begyndte, ligesom Euklid, at koncentrere sig om sandheden i præmisserne.[42] Man siger, at skolastisk filosofi var aristotelisk, hvilket dog ikke betyder, at skolastikernes holdninger til problemer var lig Aristoteles', men man brugte hans filosofi som et fælles grundlag for skolastikernes studier.[43] Denne skolastiske argumentationsmodel vil vi nu undersøge nærmere.

Thomas Aquinas (1225-1275) og hans Gudsbevis

Saint Thomas Aquinas, der levede fra 1225 til 1257, er en af de mest berømte skolastikere, der levede i middelalderen. Aquinas blev anerkendt for at have skabt en logisk struktur, der kombinerede den kristne lære og Aristoteles filosofi i et rationelt system. Hans hovedværk hedder *"Summa Theologiae,"* og det er netop dette værk og hans andre præstationer, der har givet ham titlen "Den spirituelle Euklid."[44]

Det er ikke for ingenting, at Aquinas har fået dette tilnavn. Et af de problemer, skolastikerne arbejdede med, var at bevise *Guds eksistens.* Thomas Aquinas udformede en artikel, hvori han behandlede problemet, *"Om det er selvindlysende, at Gud eksisterer,"*[45] og i denne artikel er Aquinas tydeligt inspireret af Euklid og hans måde at argumentere for beviser på. Man skal dog også huske på, at skolastikerne ligesom Euklid også var inspireret af Aristoteles' logik, så Aquinas argumentationsmodel bygger ikke udelukkende på Euklids idéer.

Denne artikel af Aquinas behandler som sagt problemet om, hvorvidt Guds eksistens er indlysende, og han argumenterer for, at den *er* selvindlysende. Dette gør han ved først at opstille tre forskellige punkter, som man en anelse forsigtigt kan kalde "beviser," idet det er tre forskellige argumentationer for, hvorfor Guds eksistens er selvindlysende. Alle tre beviser har det tilfælles, at de består af to præmisser, som Aquinas redegør for individuelt, og en konklusion, der er ens for alle tre, nemlig at det er selvindlysende, at Gud eksisterer.

---

[42] "Tankens Magt" s. 390
[43] "Tankens Magt" s. 391
[44] "Mathematics in W.C." s. 119
[45] Kilde: Kan findes i "Thomas Aquinas" s. 109. Alle citater med kursiv skrift stammer herfra.

I det første bevis er det ene præmis, at *"vi kalder det for "selvindlysende," det som vi erkender direkte og naturligt."* Dette udsagn bygger på menneskets rene fornuft og kan ikke bevises yderligere. Således har Aquinas altså ræsonneret sig frem til det ene præmis, mens det andet præmis bygger på en skrift af Johannes fra Damaskus, en tidligere teolog 675-750,[46] hvori der står, *"at erkendelsen af Guds eksistens er os medfødt."* Derfor følger det altså, at Guds eksistens er indlysende.

I det andet bevis kommer inspirationen fra Euklid virkelig til udtryk. Først gør Aquinas rede for, at de sætninger, man kalder for selvindlysende, er de sætninger, hvis rigtighed man erkender, så snart man forstår det enkelte ords betydning. Herefter henviser han til det, han kalder de første principper, og kommer med et eksempel på disse: *"Når vi nemlig ved, hvad "del" og "helhed" betyder, så ser vi straks, at enhver helhed er større end en del af den."* – Dette er præcis, hvad Euklids aksiom 5 (senere aksiom 8) siger, nemlig: *"Det hele er større end en del af det."*[47] og Euklids aksiomer var jo netop selvindlysende sætninger, der ikke kan bevises. Altså henviser Aquinas indirekte til "Elementerne" således. Det første præmis i dette bevis er endvidere: *"Men når vi ved, hvad "Gud" betyder, ved vi straks, at Gud er til, for ved dette ord betegnes noget af sådan en art, at vi ikke kan forestille os noget, der er større end det."* Altså er Gud det største, der findes. Det næste præmis, der følger, er: *"Men når jeg forstår ordet "Gud," eksisterer Gud i mit intellekt."* Sammenhængen mellem disse to præmisser består i, at det som findes i både virkeligheden og intellektet, som tilsammen udgør en helhed, er større end en del af helheden, nemlig intellektet. Gud eksisterer altså i intellektet, men idet Gud er det største, der findes, eksisterer han altså også i virkeligheden. Altså er Guds eksistens selvindlysende.

Det tredje bevis i artiklen ligner meget det første bevis i opbygningen. Det første præmis hedder: *"Det er selvindlysende, at sandheden er til."* Altså eksisterer sandheden. Dette præmis har Aquinas igen ræsonneret sig frem til, idet han argumenterer for sandheden i udsagnet ved, at *"den, der nægter, at sandheden er til, indrømmer, at den er til, for hvis sandheden ikke er til, er det sandt, at den ikke er til. Men hvis noget er sandt, må sandheden eksistere."* Igen kan præmisset nemlig ikke bevises naturvidenskabeligt, men kun ved fornuften. Det andet præmis finder Aquinas i biblen, som siger: *"Gud er sandheden selv."* Ganske enkelt følger det altså, at eftersom Gud er sandheden, og sandheden er selvindlysende, er Guds eksistens altså også selvindlysende.

Dernæst fremfører Aquinas et modbevis, der erklærer, at Guds eksistens ikke er selvindlysende, hvor han blandt andet henviser til Aristoteles' værk *"Metafysikken"* samt biblen, hvorefter Aquinas

---

[46] "Johannes"

[47] "Euclid" s. 222-232 og "Q.E.D." s. 54

sætter sig for at ”modbevise” modbeviset ved at ræsonnere. Alt i alt adskiller Aquinas’ argumentationsmodel i denne artikel sig fra Euklids i ”Elementerne” ved, at Aquinas anvender sine egne eller andre teologers ræsonnementer samt biblen som belæg for sine præmisser, hvor Euklid kun bruger sine egne logiske grundsætninger. Fælles for de to er dog den deduktive metode, hvor man drager konklusioner ved at henvise tilbage til grundlæggende selvindlysende forudsætninger, der ikke kan bevises.

Euklids ”Elementerne” har altså i forhold til den samlede mængde af de antikke værker, der blev genopdaget i Vesteuropa i senmiddelalderen, nok haft begrænset indflydelse på perioden omkring senmiddelalderen og overgangen til renæssancen. Dog gjorde de 13 bøger sig gældende inden for få væsentlige områder, såsom at fungere som fundamentet for kunsten ”geometri” i de syv artes liberales-undervisningssystemet, hvilket ansås som den vigtigste kunst inden for quadrivium-fakultetet. Derudover inspirerede det matematiske system i ”Elementerne” sammen med Aristoteles’ filosofi skolastikerne til, hvordan de skulle kombinere kristendommen med den genfundne rationelle tankegang, hvilket kommer til udtryk i Thomas Aquinas’ skrift. Så muligvis var ”Elementernes” indflydelse begrænset i denne periode, men på de få områder, hvor den gjorde sig gældende, var ”Elementerne” ganske essentiel.

Konklusion

”Elementerne” blev altså skrevet under den hellenistiske periode omkring år 300 f.Kr.. Det var en periode, hvor Grækenland var under store forandringer, idet verdens kulturelle og intellektuelle centrum flyttede fra Athen til Alexandria som en konsekvens af Alexander den Stores succesrige felttog, der skabte et kortvarigt rige. I Alexandria blev biblioteket Mouseion oprettet, hvor de lærde, herunder Euklid, studerede, arbejdede og underviste.

Da den antikke periode ophørte omkring 500 år e.Kr., blev ”Elementerne” sammen med mange af de andre antikke værker gemt væk og opbevaret på forskellige lærdomscentrer i de arabiske lande, indtil man satte sig for at oversætte dem fra græsk til arabisk og derefter til latin, så de til sidst nåede frem til Vesteuropa i senmiddelalderen. Her blev ”Elementerne” anvendt på de nyoprettede universiteter som den fundamentale kilde i kunsten geometri, som var den vigtigste kunst under fakultet quadrivium.

Grunden til, at Euklids ”Elementerne” blev anset som fundamentale inden for geometrien, skyldes det matematiske system, han grundlagde. Et system, der bygger på et grundlag for geometrien i form af definitioner, postulater og aksiomer, som Euklid selv opstillede. Ud fra disse selvindlysende grundidéer kan man ved deduktion udlede en kæde af geometriske konklusioner, som Euklid kalder for sætninger, hvilket er en metode, der bygger på Aristoteles' logiske tanker. Skolastikeren Thomas Aquinas så sig inspireret af Euklids deduktive metode, hvilket kommer til udtryk i hans artikel vedrørende Guds eksistens, hvori han også indirekte henviser til "Elementerne," og selvom Aquinas' selvindlysende præmisser bygger på teologiske ræsonnementer, mens Euklids bygger på logik, er påvirkningen fra Euklid tydelig.

Således har Euklid altså med "Elementerne" siden sin levetid i hellenismens Alexandria bevist sit værd som en af verdens mest banebrydende og skarpeste matematikere nogensinde.

Litteraturliste

Bøger:

Armbjörnsson, Ronny: *Antikken, Et kapitel i Europas idéhistorie.*
Dansk udg., Rosinante forlag, KBH, 2000.
Forkortelse: Antikken.

Baktoft, Allan: *Matematikkens Historie.*
1. udg., 1. oplag, Forlaget Natskyggen, 2010.
Forkortelse: Matematik Historie

Calinger, Ronald S.: *Classics of Mathematics.*
1. udg., Prentice Hall, 1982.
Forkortelse: C.o.M.

Damsgaard-Madsen, Aksel: *Grækenlands Historie.*
1. udg., Aarhus Universitetsforlag, Århus, 1993.
Forkortelse: Grækenlands Historie

Euclid: *The Thirteen Books of the Elements, Vol. I and II.*
Oversat med introduktion og kommentarer ved Sir Thomas L. Heath.
2. udg., Dover Publications, 1956.
Forkortelse: Euclid

Glunk, Claus og Strand, Hanne E. m.fl.: *Q.E.D, Platon og Euklid tegner og fortæller.*
1. udg., 1. oplag, Gyldendal, KBH, 2006.
Forkortelse: Q.E.D.

Goodman, D. og Russel, C.A. (red.): *The rise of Scientific Europe, 1500-1800.*
Open University, 1991.
Forkortelse: Scientific Europe
Grant, Edward: *The Foundations of Modern Science in the Middle Ages, Their religious, institutional and intellectual contexts.*
Cambridge University Press, UK, 1996.
Forkortelse: Foundations of Modern Science

Hansen, Carsten Broder og Hansen, Per Christian (red.): *Matematiske Horisonter.*
DTU: Kan findes her: (Hentet d. 15.12.10)
http://www.imm.dtu.dk/upload/institutter/imm/nyheder/matematiskehorisonter_low.pdf
Forkortelse: Horisonter

Hartnack, Justus og Sløk, Johannes (red.): *Thomas Aquinas, De Store Tænkere.*
Oversat med indledning og noter af Roos, H.
Berlingske Forlag, KBH, 1965
Forkortelse: Thomas Aquinas

Jensen, Hans Siggaard, Knudsen, Ole og Stjernfelt, Frederik (red.): *Tankens Magt, Vestens Idéhistorie.*
Bind 1, 1. udg., 2. oplag, Lindhardt & Ringhof, KBH, 2006.
Forkortelse: Tankens Magt

Jessen, Keld B. (red.): *Filosofi, Fra Antikken til vor tid.*
1. udg., 1. oplag, Forlaget Systime, Århus, 1999.
Forkortelse: Filosofi

Kline, Morris: *Mathematics in Western Culture.*
Penguin Books, USA, 1990
Forkortelse: Mathematics in W.C.

Schanz, Hans-Jørgen: *Europæisk Idéhistorie, Historie. Samfund. Eksistens.*
2. udg., 1. oplag, Høst og Søns Forlag, KBH, 2004.
Forkortelse: Europæisk Idéhistorie.

Hjemmesider, listet efter anvendelse:

Leksikon: Ptolemæerne
http://www.aschehougsleksikon.dk/ns/default.htm > Ptolemaios, ægyptiske konger
Hentet d. 10.12.10. Forkortelse: Ptolemæer

Leksikon: Dialektik
https://skoda.emu.dk/skoda-cgi/britannicaorg/eb/article-281700
Hentet d. 12.12.10. Forkortelse: Dialectic

Leksikon: Logik
http://www.aschehougsleksikon.dk/ns/default.htm > Logik
Hentet d. 13.12.10. Forkortelse: Logik

Leksikon: Deduktion

http://www.aschehougsleksikon.dk/ns/default.htm > Deduktion
Hentet d. 15.12.10. Forkortelse: Deduktion

Faktalink: Renæssancen
https://skoda.emu.dk/skoda-cgi/faktalink/faktalink/titelliste/rena/renahele
Hentet d. 18.12.10. Forkortelse: Renæssancen

Leksikon: Skolastik
https://skoda.emu.dk/skoda-cgi/britannicaorg/eb/article-9108672
Hentet d. 18.12.10. Forkortelse: Skolastik

Leksikon: Johannes af Damaskus
http://www.aschehougsleksikon.dk/ns/default.htm > Johannes af Damaskus
Hentet d. 19.12.10. Forkortelse: Johannes.