

Fag: Dansk A og Matematik A

Opgaveformulering:

Giv en matematisk redegørelse for begrebet uendelighed, herunder paradokser, forskellige typer af uendelighed, kardinaltal og mægtighed.

Skriv en populærvidenskabelig artikel på 3-4 sider om ovenstående arbejde. Artiklens målgruppe er den typiske læser af Illustreret Videnskab.

Opgaven skal endelig indeholde en meta-opgavedel, hvor du – primært ud fra en danskfaglig vinkel – redegør for dine formidlingsmæssige overvejelser i forbindelse med artiklens indhold og udformning.

Besvarelsens omfang forventes at være mellem 15 og 20 sider excl. bilag

Abstract

This paper examines the aspects of infinity including paradoxes, different shapes of infinity, and cardinality. The paper consists of three parts: first a mathematical technically part, second a popular science article of which the target group is the typical reader of Science Illustrated, and third a debate of the considerations about the formation of the popular science article.

The study investigated areas such as the numbers, sets, cardinality, paradoxes, and the mathematician

Georg Cantor's work with the real-, natural-, and rational numbers. After a thorough examine of the aspects of infinity, a popular science article was formed. The article included large amounts of texts from the mathematical technically part. A debate of the considerations about the formation of the popular science article was based on rhetoric, how to form an article, and linguistic thoughts. The examine shows that there are two different shapes of infinity; the infinity of the natural numbers, and the infinity of the real numbers. Georg Cantor's work shows that the cardinality

of the real numbers is "greater" than the cardinality of the natural numbers.

Through the debate the study shows, that it takes much consideration in the process of forming a popular science article. One shall consider wording, formulation, layout, and graphics to be able to write an article within the parameter of the target group.

Indholdsfortegnelse

Abstract.....	1
Indledning	3
Uendelighedsbegrebet.....	4
Tal	4
Mængder	5
Begrebet uendelighed	7
Kardinaltal.....	10
Mere uendeligt?	11
Uendelighedens paradokser	14
Uendeligheden – Populærvidenskabelig artikel	16
Meta-opgavedel	23
Konklusion	26
Litteraturliste	27

Indledning

Det følgende studieretningsprojekt omhandler det matematiske begreb *Uendeligheden*. Projektet er tredelt i et matematisk afsnit, et danskfagligt afsnit og et meta-danskfagligt afsnit.

Projektets primære fokus er, at give en matematisk redegørelse af begrebet *uendelig*, for dernæst at skrive en populærvidenskabelig artikel til den typiske læser af bladet Illustreret Videnskab, om den matematiske redegørelse. Slutteligt vil der, med udgangspunkt i populærvidenskabsartiklen, være en diskussion af enhver overvejelse omkring indhold, layout og udformning, der har fundet sted under skriveprocessen.

Uendelighedsbegrebet

Tal

De naturlige tal

Hele tal, som ikke er negative, kalder vi for *de naturlige tal*. Symbolet for disse tal er N , vi skriver:

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Og siger, at *mængden* af de naturlige tal N går imod ∞ :

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

De hele tal

Negative og positive tal kalder vi for *de hele tal*. Symbolet for disse tal er Z , vi skriver:

$$Z = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Og siger, at *mængden* af de hele tal Z går imod $\pm \infty$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

De rationelle tal

Tal, der kan skrives på formen $\frac{p}{q}$, $p \in Z$, $q \in N$ kalder vi for *de rationelle tal*. Symbolet for disse tal er Q , vi skriver:

$$Q = \dots, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

Og siger, at *mængden* af de rationelle tal Q går imod $\pm \infty$

$$Q = \{\dots, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$$

De reelle tal

Ser vi på de hele tal, de rationelle tal og de irrationelle tal (dvs. tal, der ikke kan beskrive et forhold mellem to størrelser på samme måde som de rationelle, fx π eller kvadratroden af tallet 2) så kalder vi samlet disse tal for *de reelle tal*. Symbolet for disse tal er R . R kan skrives som decimaltal, og mængden R er talmængden af alle rationale og irrationale tal.

Mængden af de reelle tal R er mere uendelig end N , Z og Q . Med udtrykket "mere uendelig" menes der, at i modsætning til de naturlige tal, så kan de reelle tal ikke tælles, selvom om man fik uendelig meget tid til det. Der er simpelthen være for mange tal. Dette vil blive bevist senere i opgaven.

Mængder

At have en mængde vil sige at have en gruppe af objekter, kaldet *elementer*, som kan bestemmes til at være en del af en gruppe eller ej. Groft sagt er det, at man kan tælle, hvor meget der er af noget.

Elementerne kommer fra det fastlagte univers U , og alle mængder er fastlagt af deres elementer.

Eksempel:

Se mængden M_1 . Denne mængde består af alle naturlige tal fra 10 til og med 15, vi skriver:

$$M_1 = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Altså er 10, 11, 12, 13, 14, 15 alle elementer i M_1 .

Listeform

Ovenstående eksempel leder os videre til emnet listeform. M_1 har et endeligt antal elementer, og derfor kan vi skrive dem alle imellem de to parenteser $\{$ og $\}$, og dermed har vi en *endelig fuldstændig listeform*.

Hvis mængden M_2 har rigtig mange elementer, fx 1000, så kan vi lave en *endelig ufuldstændig listeform*:

$$M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1000\}$$

Lad os nu sige, at en tredje mængde, M_3 har uendeligt mange elementer, så kan vi lave en *uendelig ufuldstændig listeform*:

$$M_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Delmængder

Den følgende definition af delmængder og ægte delmængder er hovedsageligt bygget på Brandt, Jørgen og Knud Nissen. "*Q.E.D. - en introduktion til matematisk bevis*". 1. udgave. 2. oplag. ABACUS. 1997

Vi har to givne mængder A og B . A er en delmængde i B , hvis elementerne i A også er elementer i B . Vi skriver det:

$$A \subseteq B$$

Matematisk siger vi, at A er en delmængde i B , hvis og kun hvis der for alle x gælder, at de er element i universet U og hvis x er element i A så er x element i B er sandt

Man formulerer det således:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in U [x \in A \rightarrow x \in B] \text{ er sandt}$$

Ægte delmængder

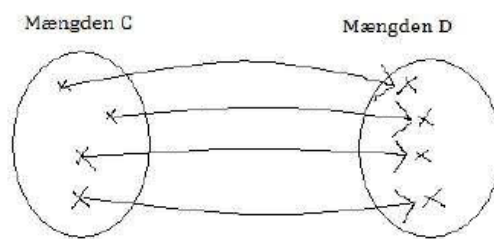
A er en ægte delmængde i B, hvis A er en delmængde i B og der findes et x , som er element i A, men *ikke* i B. Vi skriver det:

$$A \subset B, \text{ hvis } A \subseteq B, \text{ og der findes et } x \in A, \text{ således at } x \notin B$$

Sammenligning af mængder

Hvis man ønsker at sammenligne to givne mængder C og D, så skal man lave en såkaldt *entydig bijektion*.

Det går ud på at, der til hvert element i C skal være et og kun et tilsvarende element i D og omvendt. Dette illustreres bedst, hvis man forestiller sig en mængde som en cirkel med dens elementer indeni:



x repræsenterer mængdernes elementer

Af denne bijektion kan vi se, at de to mængder C og D har samme antal elementer, da man kan foretage en entydig bijektion af C på D.

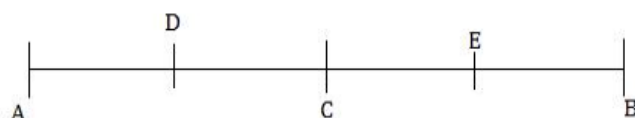
På tilsvarende vis kan man sammenligne to givne uendelige mængder I og L. De siges at være *ækvipotente*, hvis vi kan foretage en entydig bijektion af I på L. Heraf får vi, at I og L repræsenterer den samme type uendelighed.

Begrebet uendelighed

Vi har nu hørt om det basale matematik, der ligger til grund for uendelighedsbegrebet, nemlig tal og mængder. Det er en nødvendighed at kende til tal og mængder, for at kunne forholde sig til begrebet uendelighed. Men hvad er så uendelighed? Det vil vi forsøge at få afdækket i det følgende afsnit.

Potentielt og aktuelt

Inden for matematikken er der to forskellige betydninger af uendelighed. For at gøre disse betydninger klare, tager vi udgangspunkt i et linjestykke som vi kalder **AB**:



Først har vi de to punkter **A** og **B**. Vi indskyder nu punktet **C** imellem **A** og **B**, så linjestykkerne **AC** og **CB** fremkommer. Vi indskyder nu de to punkter **D** og **E**, imellem hhv. **A** og **C** og **C** og **B**. Sådan fortsætter processen.

Matematisk kan vi beskrive sammenhængen som følger:

Der er først 1 linjestykke, dernæst 2, 4, 8, 16 linjestykker. Denne sammenhæng skrives:

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots, \text{hvor } n \text{ er et positivt helt tal}$$

Kigger vi udelukkende på punkterne, så hedder sammenhængen:

$$2, 3, 5, 9, 17, \dots, 2^{n+1}, \dots$$

Nu er det, at de to betydninger bliver væsentlige.

Den første betydning hedder *potentielt uendeligt*:

Hver gang vi indskyder et nyt punkt på linjestykket **AB**, så tilføjer vi et punkt til det samlede antal af punkter på **AB**. Der er ikke flere punkter på **AB** end det samlede antal, det er altså et endeligt antal punkter, der vokser over alle grænser, som har muligheden for at blive uendelig stor, men aldrig kan blive det.

Eksempel:

Bo og Lis står med ryggen til hinanden på en uendelig lang vej, og begynder at gå lige frem. De når 100m frem hver og afstanden mellem dem er derfor 200m. De går igen og afstanden vokser til 400m, dernæst 600m og så fremdeles. Bo og Lis har altså muligheden for at gøre afstanden uendelig stor, men lige så snart de stopper med at gå så vil afstanden altid være endelig stor, den kan aldrig blive uendelig stor.

Den anden betydning hedder *aktuelt uendeligt*:

I stedet for at opfatte linjestykket **AB** som et samlet stykke, så kan vi opfatte det som en mængde af eksisterende punkter. I takt med at vi opdeler linjestykket, støder vi på de eksisterende punkter. Punkterne er altså uendelig mange allerede før vi støder på nogle af dem.

Eksempel:

Mængden af de naturlige tal, $\mathbb{N}$, er aktuelt uendelig fordi den allerede er uendelig stor, den har altså ikke muligheden for at blive uendelig stor.

De to betydninger stammer fra den historiske periode, som vi kalder Antikken. Ca. 350 år f.Kr. fastslog filosofen Aristoteles, at matematikerne kun brugte begrebet *potentielt uendeligt*, og at dette begreb var tilstrækkeligt. Helt indtil ca. 1850-60 var flertallet af matematikerne enige med Aristoteles, men siden da har begrebet *aktuelt uendeligt* fundet vej til matematikerne, og det er dette begreb de fleste matematikere anvender i dag.

Konvergerende rækker

Når vi arbejder med tal og uendelighed på samme tid, så laver vi nogle rækker. Disse rækker kan bruges til at beregne en endelig sum for en uendelig række tal eller beregne summen for irrationale tal.

En konvergerende række kan se således ud:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

En *kvotientrække* er en konvergerende række, hvor man ganger med en kvotient for at komme til det næste tal i rækken. En kvotientrække ser således ud:

$$S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n \quad (1)$$

Hvis kvotienten er mindre end 1, så kan rækkens sum beregnes. Beviset kommer her:

Det følgende bevis er hovedsageligt bygget på Baktoft, Allan. *Videnskabsteori for ren matematik. 1. udgave. 1. oplag. Natskyggen. 2010. s. 28m*

Vi tager udgangspunkt i (1):

$$S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n$$

Vi ganger med a på begge sider og får:

$$\begin{aligned} a \cdot S_n &= a \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n) \\ \Downarrow \\ a \cdot S_n &= a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n + a^{n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

Vi trækker nu (2) fra (1), altså venstre side i (2) trækkes fra venstre side i (1) og ligeledes med højre side:

$$S_n - a \cdot S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n - (a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n + a^{n+1})$$

De fleste led i rækken går ud med hinanden, og vi har tilbage:

$$S_n - a \cdot S_n = 1 - a^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$S_n \cdot (1 - a) = 1 - a^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Heraf får vi, at:

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \rightarrow \frac{1}{1 - a}, \text{ for } n \rightarrow \infty \text{ når } 0 < a < 1 \quad (3)$$

Med (3) har vi nu muligheden for at beregne den uendelige sum

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n + \dots$$

Vi vil nu beregne den uendelige sum, hvor $a = \frac{1}{2}$

Vi indsætter i (3) og får:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Det er nu bevist, at en kvotientrække med en kvotient mindre end 1, har en endelig værdi.

Kardinaltal

Definition

Kardinalitet er en mængdes mægtighed, det vil sige antallet af elementer i mængden.

Kardinaltallene for hhv. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, ... betegnes med 0, 1, 2, 3, ... og kaldes *endelige kardinaltal*.

Kardinaltal såsom det hebraiske bogstav *alef*; $\aleph_0$ og symbolet c kaldes *uendelige kardinaltal*.

$\aleph_0$ er kardinaltallet for den uendelighed, som de naturlige tal repræsenterer, og c er kardinaltallet for den uendelighed, som de reelle tal repræsenterer.

Hvis vi ser på mængden T :

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Er der 10 elementer i T , altså er T 's kardinaltal et endeligt kardinaltal, nemlig 10. Man skriver kardinaltallet for en mængde således:

$$|T| = 10$$

De *uendelige kardinaltal* hører til de uendelige mængder, som fx de naturlige tal N eller de reelle tal R . Vi kan skrive således:

$$\aleph_0 = |N|$$

$$c = |R|$$

Hvis to givne mængder G og H har lige mange elementer, så har de samme mægtighed, altså samme kardinaltal. Matematisk skriver man det:

$$\overline{G} = \overline{H}$$

Og siger, at de to mængder G og H har samme mægtighed, hvis der findes en entydig bijektion af G på H .

Mere uendeligt?

De naturlige tals talmængde er som bekendt uendelig. Man kan altid lægge 1 til og derved komme 1 længere hen på den uendelige række af tal. Det er derfor nærliggende at påstå, at enhver talrække, der kan "parres" med et tal fra de naturlige tal ud i det uendelige, må være ligeså uendelig som de naturlige tal. Dette vil vi nu undersøge.

Rækkefølge-uendelighed

Vi tager udgangspunkt i de naturlige tal, og vil forsøge at sammenligne dem med delmængder af mængden N .

Mængden af lige tal er givet ved:

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , ...

De "parres" nu med N:

2	4	6	8	10	12	14	16	...
1	2	3	4	5	6	7	8	...

Heraf ser vi, at de lige tals mængde er lige så mægtig som de naturlige tals. Dette må nødvendigvis også gælde for de ulige tals og de hele tals mængde. Vi kan derfor slutte, at: $\aleph_0 = |N| = |Z|$

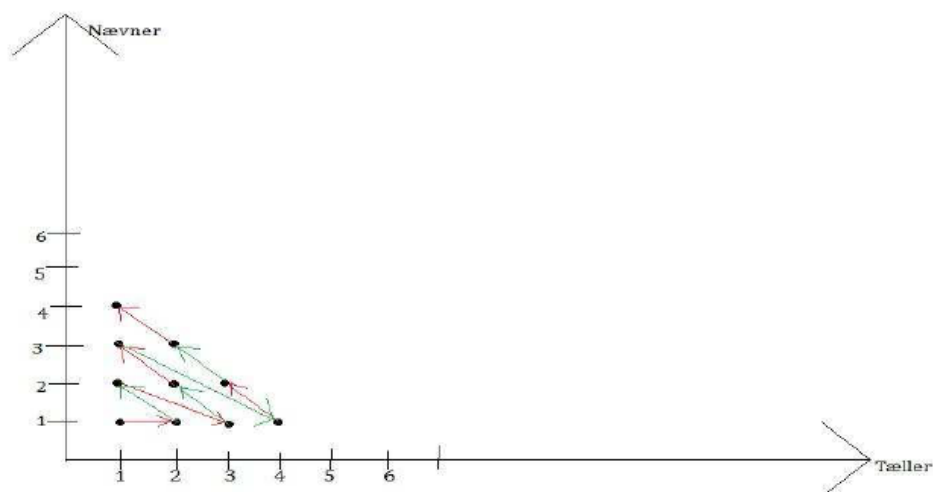
Vi kan blive ved med at sammenligne mængden N med dens delmængder i det uendelige.

De rationelle tals tællelighed

Vi vil nu behandle de rationelle tal. Vi vil gerne vise, at de er tællelige på samme måde som N . Dette må betyde, at de rationelle tal har samme mægtighed som de naturlige tal. Hvis dette er tilfældet, så kan vi "parre" samtlige rationelle tal med et naturligt tal ud i det uendelige. Bevis:

Det følgende bevis bygger hovedsagligt på beviset i *Møjlbo, Lars. "Om det uendelige". Matematikkens Aspekter. Matematiklærerforeningen. 1991. s. 13-14*

Vi ser på et koordinatsystem med de naturlige tal på begge akser:



Koordinaterne (x,y) repræsenterer nu samtlige positive rationale tal, da vi kan skrive dem på formen $\frac{x}{y}$

De brøker, som fremkommer flere gange, fx $\frac{1}{1}$ eller $\frac{2}{2}$ vedtager vi at slette, når vi møder dem igen. Brøkerne nedenfor er vilkårligt udvalgt og i vilkårlig rækkefølge:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Vi har nu kun et problem: de rationelle tal består jo også af negative brøker, og de vi har nu er kun positive brøker. Det løser vi med et smart trick, og tager udgangspunkt i de ovenstående vilkårlige brøker. Det smarte trick er nemlig at fortsætte sammenparringen af N og Q ved at starte ved tallet 0. Efter 0, så kommer den positive brøk $\frac{1}{1}$ og efter denne kommer den negative brøk $-\frac{1}{1}$ osv.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-3	...

På denne måde får vi alle rationelle tal med. Vi har nu vist, at Q er en tællelig mængde, og at den er ligeså tællelig som mængden N , altså at den har samme kardinaltal og mægtighed. Vi kan derfor slutte, at $\aleph_0 = |N| = |Z| = |Q|$

Mere uendeligt

Som sagt i afsnittet "Tal", så er mængden af de reelle tal mere uendelig end de hele, de naturlige og de rationelle. Dette vil vi nu gerne bevise:

Beviset blev fremlagt af den tyske matematiker Georg Cantor, som jeg vil benævne Cantor.

Det følgende bevis bygger hovedsagligt på beviset i Mejlbo, Lars. "Om det uendelige". *Matematikkens Aspekter. Matematiklærerforeningen. 1991. s. 14-15*

Vi benytter her et indirekte bevis, og viser, at end ikke de reelle tal mellem 0 og 1 kan opstilles i en rækkefølge-uendelighed. Vi antager, at dette er muligt, altså at man kan skabe en entydig bijektion $N \rightarrow R$

Følgende decimaltal er tilfældigt konstrueret:

nr. 1 : 0,4849869 ...
 nr. 2 : 0,9874376 ...
 nr. 3 : 0,2896219 ...
 nr. 4 : 0,8543132 ...
 nr. n : 0, ...
 ...

Denne opstilling fortsættes, indtil at vi må formode at have alle decimaltallene mellem 0 og 1 med.
MEN:

Der laves en ny decimalbrøk, som har mindst et ciffer til forskel med de opstillede decimaltal. Dette gøres på følgende måde:

Den nye decimalbrøk kalder vi d , og for d skal der gælde, at:

$$\begin{aligned} d \text{ s } 1.\text{ciffer} &\neq \text{nr. } 1' \text{ s } 1.\text{ciffer} \\ d \text{ s } 2.\text{ciffer} &\neq \text{nr. } 2' \text{ s } 2.\text{ciffer} \\ d \text{ s } 3.\text{ciffer} &\neq \text{nr. } 3' \text{ s } 3.\text{ciffer} \\ d \text{ s } 4.\text{ciffer} &\neq \text{nr. } 4' \text{ s } 4.\text{ciffer} \\ &\dots \\ d \text{ s } n.\text{ciffer} &\neq \text{nr. } n' \text{ s } n.\text{ciffer} \\ &\dots \end{aligned}$$

Vi får nu decimaltallet d , der ser således ud:

$$d = 0,7316\dots$$

Og dette decimaltal, som klart er mellem 0 og 1, kan ikke være i vores opstillede rækkefølge, og derfor kan rækkefølgen altså ikke tælle alle reelle tal mellem 0 og 1.

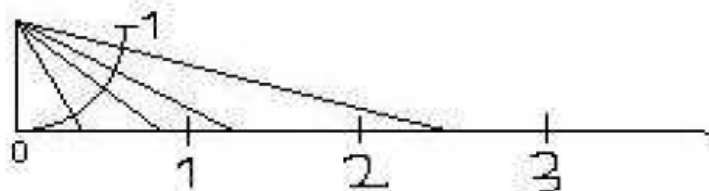
Vi kan nu slutte, at:

$$\overline{R} > \overline{N}$$

Og sige, at mængtigheden af de reelle tal er større end mængtigheden af de naturlige tal. De er mere uendelige, fordi de ikke kan tælles.

Dette bevis blev senere kendt som Cantors *diagonalbevis*.

Vi kan vise, at intervallet $[0,1]$ er ligeså uendelig som alle de reelle tal. Hvis vi danner en linje, hvorpå alle de reelle tal er, og samtidig tager linjestykket for $[0,1]$ og bøjer det som en cirkelbue. Så kan vi, ved at forlænge en streg fra centrum og igennem cirkelbuen, finde ud af, at der er ligeså mange punkter på cirkelbuen, som der er på hele linjen R :



Vi kan derfor slutte, at:

$$c = |R| = |[0,1]|$$

Uendelighedens paradokser

Når vi går fra den verden, som matematikken befinder sig i og til den virkelige verden, så opstår der problemer. Vi støder på såkaldte *paradokser*. Det følgende afsnit vil omhandle to af sådanne paradokser.

Hilberts Hotel

Den store matematiker *David Hilbert* (1862-1943) benyttede ofte et særligt hotel til at forklare om mængdelæren. Dette hotel blev senere kaldt *Hilberts Hotel*. Hotellet har uendelig mange værelser, og hvert værelse har numrene 1, 2, 3, 4, ..., n , $n+1$, ... På disse værelser er der kun plads til én person. Det er ikke direkte et paradoks, men mere et middel til at forstå det utrolige ved uendeligheden. Vi vil nu se på, hvordan vi kan indlogere gæster på dette hotel:

1. Der ankommer en bus fyldt med uendelig mange fodboldspillere

Intet problem - de får et værelse hver, således at spiller nr. 1 har værelse 1, spiller nr. 2 har værelse 2 og så fremdeles.

2. Der ankommer én fodboldspiller mere

Nu beder vi alle de indlogerede spillere om at flytte fra sit nuværende værelse, til det værelse, der har nummeret én større end deres nuværende. På denne måde flytter spilleren i værelse 1 til værelse 2, spilleren i værelse 2 til værelse 3, spilleren i værelse n til værelse $n+1$, og så fremdeles. Nu kan den nyankomne fodboldspiller tjekke ind på værelse 1.

3. Der ankommer endnu en bus fyldt med uendelig mange fodboldspillere

Vi beder nu alle de indlogerede spillere om at flytte til det værelse, der har det dobbelte nummer. På denne måde flytte spilleren i værelse 1 til værelse 2, værelse 2 til værelse 4, værelse n til værelse $2 \cdot n$. De uendelig mange nyankomne fodboldspillere kan nu tjekke ind i de værelser med ulige numre.

4. Hotellet har været ramt af en bombetrussel, og blev derfor evakueret. Hotellet er derfor tomt, men der ankommer nu uendelig mange busser fyldt med uendelig mange fodboldspillere.

Vi gør følgende:

Spillere fra bus nr. 1 får værelserne 1, 3, 5, ..., $2 \cdot n - 1$, ...

Spillere fra bus nr. 2 får værelserne 2, 6, 10, ..., $2 \cdot (2 \cdot n - 1)$, ...

Spillere fra bus nr. 3 får værelserne 4, 12, 20, ..., $4 \cdot (2 \cdot n - 1)$, ...

Spillere fra bus nr. k får værelserne 2^{k-1} , $3 \cdot 2^{k-1}$, $5 \cdot 2^{k-1}$, ..., $(2 \cdot n - 1) \cdot 2^{k-1}$, ...

Dermed finder vi et værelse til hver af de uendelig mange fodboldspillere.

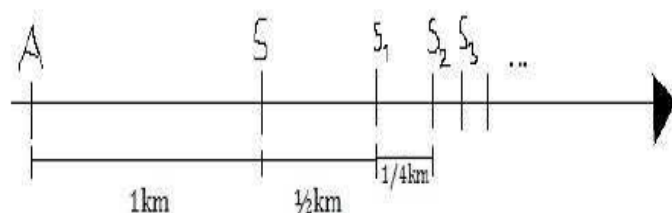
Achilleus og skildpadden

Den græske filosof *Zenon* (ca. 400 år f.Kr.) kom med paradokset Achilleus og skildpadden. *Zenon* var af den overbevisning, at al bevægelse er umulig, og dette skulle paradokset om kapløbet imellem den græske helt Achilleus og skildpadden påvise. *Zenon* mente, at hvis skildpadden fik et forspring, så ville det ikke være muligt for Achilleus at indhente og overhale skildpadden. Dette skyldes, at Achilleus skal igennem uendelig mange punkter, for at komme forbi skildpadden.

Vi gennemgår paradokset:

Achilleus starter ved A, og skildpadden starter ved S. Når Achilleus er nået til S, så er skildpadden nået til S_1 . Når Achilleus er nået til S_1 , så er skildpadden ved S_2 . Når Achilleus er nået til S_2 , så er skildpadden nået til S_3 og sådan kunne Achilleus, ifølge *Zenon*, fortsætte i det uendelige.

Vi antager, at Achilleus løber dobbelt så hurtigt som skildpadden, og skildpadden havde et forspring på 1 km:



Vi kan rent faktisk beregne, hvornår Achilleus indhenter skildpadden, ved hjælp af sætning (3) under afsnittet "Konvergerende rækker":

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \rightarrow \frac{1}{1 - a}, \text{ for } n \rightarrow \infty \text{ når } 0 < a < 1$$

Da vi har antaget, at Achilleus løber dobbelt så hurtigt som skildpadden, kan vi fastslå a til $\frac{1}{2}$

Vi beregner nu, hvornår Achilleus indhenter skildpadden:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \text{ km}$$

Achilleus indhenter altså skildpadden efter 2 km, men det er vel at mærke kun, hvis han ikke stopper op ved hvert punkt og råber det tilhørende tal. Gør han dette, ville han ende med at skulle sige et uendeligt langt tal. En umulig opgave i den virkelige verden, men ikke i matematikkens. Det er her, at vi kan se, at mødet imellem den matematiske verden og den virkelige verden er paradoksalt.

Der gives her en kort, konkret gennemgang af de begreber, som er vigtige at kende, for at forstå uendeligheden:

Tallene	
De naturlige tal er de tal, som vi kender fra hverdagen. Vi kan tælle dem; 1, 2, 3, 4, ... i det uendelige, fordi vi altid kan gøre det én større og komme en tak videre til det næste tal.	Tallenes Symboler N = Mængden af naturlige tal Q = Mængden af rationelle tal Z = Mængden af hele tal R = Mængden af reelle tal
De hele tal kan på samme måde som de naturlige tal tælles i det uendelige, men de hele tal inkluderer også negative tal og tallet 0: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...	
De rationelle tal er alle de tal, som vi kan skrive som en brøk. De kan være både negative og positive, og kan være uendelig store og uendelig små. Hertil hører de irrationelle tal, som er tal, vi <u>ikke</u> kan skrive som en brøk. Det mest velkendte irrationelle tal er $\pi=3,14159 \dots$	
De reelle tal er groft sagt samtlige decimaltal, der findes. Det er alle de tal, som de hele tal, de rationelle tal og de irrationelle tal udgør tilsammen.	
Tal på mængderne	
En mængde er blot en samling af objekter, ligesom æbler i en kurv. Vi kan angive hvilke objekter, mængden indeholder ved hjælp af krølleparenteser: {1,2,3,4,5} er en mængde af tal på samme måde som {     } er en mængde af æbler. Vi kan tælle objekterne i en mængde, ved at tildele et naturligt tal til hvert objekt og på denne måde skabe en en-til-en korrespondance imellem tallene og objekterne. 1 ↑  2 ↑  3 ↑  4 ↑ 	
Denne korrespondance svarer til, at vi kan se, der er lige mange fingre på højre hånd, som der er på venstre hånd, blot ved at sætte hver enkelt finger fra venstre hånd overfor hver enkelt finger fra højre hånd. Ved denne sammenligning ser vi, at der for hver finger på venstre hånd er nøjagtig én på højre hånd og omvendt - altså en en-til-en korrespondance.	
Mængdernes kardinalitet	
Begrebet "kardinalitet" er blot en anden måde at sige, hvor mange objekter der er i en mængde. Hvis vi har en mængde med tallene 1,2,3,4, så er kardinaliteten af mængden 4. Hvis vi har fire æbler i en kurv, så er kurvens kardinalitet ligeledes 4. Man siger også, at deres kardinaltal er 4. Kan vi lave en en-til-en korrespondance imellem to mængder, så er deres kardinalitet ens og de har samme mængtighed.	

Uendelige mængder Hvis en mængde indeholder fx. alle de naturlige tal, så har den ingen ende. Dette betyder altså, at en mængde er uendelig, hvis den fortsætter og aldrig stopper.	Vidste du, at... Det var Georg Cantor (1845-1918) der indførte kardinaltallet for de naturlige tals uendelighed: $\aleph_0$. Den uendelige mængde æbler $\{ \text{🍏} \text{🍏} \text{🍏} \text{🍏} \dots \}$ har også kardinaltallet $\aleph_0$, fordi vi kan lave en en-til-en korrespondance imellem de naturlige tal og æblerne, som fortsætter uendeligt.
Delmængder Kurv A indeholder tre æbler; et grønt, et rødt og et blå, og kurv B indeholder to æbler; et grønt og et rødt. Da kurv B's æbler er de samme som nogle af kurv A's æbler, så er kurv B en delmængde af kurv A. Derimod indeholder kurv A et æble, som ikke ens med nogle af de æbler i kurv B, nemlig det blå æble, og derfor er kurv A en ægte delmængde af kurv B	

Dette var en kort gennemgang af de mest essentielle begreber indenfor uendeligheden. Til højre ses eksempler på de symboler, som matematikerne benytter på dette område.

$\in$	Er element i ...
$\notin$	Er ikke element i ...
$\subseteq$	Er en delmængde af ...
$\subset$	Er en ægte delmængde af ...

Hvad er det uendelige?

Grækeren Anaximander (ca.610-545 f.Kr.) fra den græske koloni Milet var formodentlig den første til at acceptere det uendelige. Han definerede det med det græske ord *apeiron*, som betyder *uden ende*. Netop denne beskrivelse er vel også den bedste beskrivelse, man kan give af uendeligheden uden at drage fysiske, teologiske og matematiske aspekter ind over det.

I matematikkens verden kan en endelig lang linje indeholde lige så mange punkter som en uendelig lang linje. I den virkelige verden lyder dette ganske utroligt, og selvfølgelig passer det ikke, hvis vi vil lave punkter med en lineal, men i matematikkens verden kan man rent faktisk vise, at den korte linje har lige så mange punkter som den lange linje.

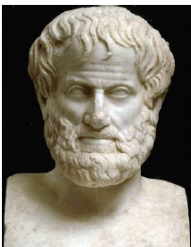
Det står nu fast, at begrebet "uendelig" er et meget abstrakt og besynderligt begreb ikke mindst i matematikkens verden.

2 uendelige begreber

Da den banebrydende filosof og videnskabsmand Aristoteles (384-322 f.Kr.) analyserede uendeligheden, fandt han frem til, at der var to begreber indenfor uendeligheden.

Det første er potentielt uendeligt, og det andet er aktuelt uendeligt. At noget er potentielt uendeligt vil sige, at det hele tiden vokser større og større, men uanset hvor længe det vokser, så vil det altid være endeligt stort. Man kan sige, at det har muligheden, heraf potentielt, for at blive uendelig stor, men vil aldrig kunne blive det. Man kan

tænke på det således, at hvis eksempelvis de to gode venner, Bo og Lis, bor på en vej. Denne vej er



uendelig lang mod højre og uendelig lang mod venstre. Bo og Lis beslutter sig nu for at se, hvem der kan tilbagelægge den største afstand. Konkurrencemennesker som de er, går de straks i gang, Bo går til højre på vejen og Lis til venstre. Afstanden imellem Bo og Lis vokser nu hele tiden, i takt med at de går. På denne måde har de altså muligheden for at gøre afstanden imellem dem uendelig stor, men

Aristoteles slog fast, at matematikken og dens brugere kun benyttede sig af potentielt uendeligt, og at det var det eneste uendelige begreb, de havde brug for. I dag er den gængse opfattelse, at aktuelt uendeligt er det korrekte begreb.

Vidste du, at...

Aristoteles beskrev potentielt uendeligt og aktuelt uendeligt som en marmorblok. For at blokken kunne blive til en statue - dens potentiale - skulle der være en stenhugger til at gøre statuen aktuel. Det potentielle er altså det mulige, mens det aktuelle er det virkelige.

uanset hvor længe de skulle have lyst til at gå, så vil afstanden altid være endelig stor.

En uvirkelig verden

Matematikens verden er ikke som den virkelige verden. Man kan ikke overføre egenskaber fra den matematiske til den virkelige verden, uden at støde ind i problemer, da uendeligheden er et specielt begreb i matematikken. Spørgsmål og forundring omkring størrelsen af dette begreb har dannet grundlag for mange paradokser.

Achilleus og Skildpadden

Et af disse paradokser kommer fra filosofen Zenon (ca. 490-430 f.Kr.), som fremsatte paradokset om den græske helt Achilleus og Skildpadden, der skulle løbe om kap. Et tilsyneladende overkommeligt kapløb for den fodrappe hurtigløber Achilleus som da også er så venlig at give den langsomme Skildpadden et forspring. Zenon mener, at i og med Achilleus giver Skildpadden et forspring, så kan han ikke vinde. Zenon tog nemlig fat i de uendelig mange punkter på et linjestykke og konstaterede, at Achilleus umuligt ville være i stand til at løbe "igennem" alle de uendelig mange punkter på hans vej til mål. Hvis Achilleus løber dobbelt så hurtigt som Skildpadden, så vil afstanden imellem dem blive halveret ved hvert punkt, Achilleus kommer til, og dette ville, ifølge

Zenon, medvirke til at Achilleus aldrig ville indhente Skildpadden.

Dette paradoks falder til jorden, hvis vi forsøger at overføre det til den virkelige verden. I faktaboksen til højre kan vi konstatere, at Achilleus overhaler Skildpadden efter 2 km, og dermed vinder han kapløbet.

Hotel Uendeligheden

Uendeligheden har mange funktioner og egenskaber. Det indså matematikeren David Hilbert (1862-1943), og han grundlagde derfor sit helt eget hotel, nemlig Hilberts Hotel. Hotellet har plads til uendelig mange gæster, men da der blot er én seng pr. værelse, må hver gæst have sit eget værelse. Værelserne nummereres med de naturlige tal. Hotellet bliver imidlertid et kæmpe hit, og der kommer uendelig mange mennesker fra nær og fjern for at besøge det nye hotel. De uendelig mange gæster har nu fået et værelse hver, og hotellet er fyldt. Men hvad nu hvis der kommer endnu en gæst og beder om et værelse? Hotellets personale beder blot gæsten i værelse nr. 1 om at flytte til værelse nr. 2, gæsten i værelse nr. 2 skal flytte til værelse nr. 3, og så videre. Så kan den nyankomne gæst bo i nr. 1. Rent faktisk kan hotellet rumme uendelig mange nye gæster, selvom det er fyldt op i forvejen. Den følgende tekstboks vil forklare det nærmere rent matematisk.

Achilleus & Skildpadden

Det er den uendelig lange tal-

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

række som kaldes en kvotientrække, Achilleus skal kæmpe sig igennem for at slå Skildpadden.

En umulig opgave i matematikens verden, men ikke i den virkelige verden. Dette eksempel på en kvotientrække har nemlig værdien $1,999\dots$, et tal, som vi i den virkelige verden regner for at have værdien 2. Indenfor matematikken hedder det, at rækken konvergerer imod 2.

Matematisk forklaring af Hilberts Hotel

Hotellet bygger på, at man altid kan lægge 1, 2, 3 eller hvilket som helst naturligt tal, til de naturlige tal. Derfor:

Ankommer der én gæst til det fyldte hotel, hedder regnestykket $\infty+1=\infty$. Ankommer der 10 gæster til det fyldte hotel, så hedder regnestykket $\infty+10=\infty$.

Hvis der skulle ankomme uendelig mange nye gæster til det fyldte hotel, så hedder regnestykket $\infty+\infty=\infty$. Gæsterne arrangeres så sådan, at alle de gæster, der bor på hotellet i forvejen, bliver fordelt på alle værelser med lige numre, dvs. $2 \cdot n$, hvor n er et naturligt tal. Alle de nyankomne gæster flytter så ind på de værelser med ulige numre, dvs. $2 \cdot (n-1)$, hvor n er et naturligt tal.

Indtil nu har hotellet være fyldt fra starten af, men hvad nu, hvis det er tomt og der ankommer uendelig mange busser med uendelig mange gæster?

Så hedder regnestykket $\infty \cdot \infty = \infty$ og igen finder hotellet værelser til alle gæsterne. Gæsterne fra bus nr. 1 får værelserne med ulige numre, dvs. $2 \cdot (n-1)$, hvor n er et naturligt tal.

(Fortsættes på næste side)

Matematisk forklaring af Hilberts Hotel (fortsat)

Gæsterne fra bus nr. 2 får værelserne med numrene 2 gange et ulige nummer, dvs. $2 \cdot (2 \cdot (n-1))$, hvor n er et naturligt tal. Gæsterne fra bus nr. 3 får værelserne med numrene 4 gange et ulige nummer, dvs. $4 \cdot (2 \cdot (n-1))$, hvor n er et naturligt tal. Gæsterne fra bus nr. k får værelserne med numrene 2^{k-1} gange et ulige nummer, dvs. $2^{k-1} \cdot (2 \cdot (n-1))$, hvor k og n er et naturligt tal.



Det var matematikeren David Hilbert som benyttede et magisk hotel (billede) til at forklare om mængdelæren. Der var uendelig mange værelser på hotellet, og til at holde styr på værelsesnumrene benyttede David Hilbert sig af de naturlige tal.

Hvordan David Hilbert havde tænkt sig at bygge det uendelig store hotel i den virkelige verden vides ikke, men det har sikkert krævet en del mursten og knofedt.

At kunne tælle eller ikke at kunne tælle

Man kan nu spørge sig selv, om der mon findes en mængde, som er mere uendelig end $\aleph_0$? Har Hilberts Hotel plads til alle slags tal? For at hotellet skal have plads til en slags tal, så skal de omtalte tal kunne stilles op, således at de følger de naturlige tals rækkefølge, der skal altså kunne laves en en-til-en korrespondance imellem de naturlige tal og en given slags tal. Fra tekstboksen ovenfor blev det vist, at der er lige så mange værelser, som der er ulige og lige numre, og det kræver ikke megen snilde at se, at de hele tal også ville kunne få et værelse på hotellet. Men hvad så med eksempelvis brøkerne, altså de rationelle tal? Det var den tyske matematiker Georg Cantor (1845-1918), der beviste en-til-en korrespondancen imellem de rationelle tal og de naturlige tal, og han beviste også, at der ikke kunne laves en en-til-en korrespondance imellem de reelle tal og de naturlige tal, altså at man ikke ville

kunne tælle de reelle tal. Til de to beviser benytter Georg Cantor en metode, der kaldes diagonalmetoden (se figur 1 næste side).

Til at bevise de reelle tals utællelighed brugte Georg Cantor et modstridsargument. Grundlæggende er det at antage noget andet end det man vil bevise er gældende, for derefter at finde en modstrid, der kan bevise ugyldigheden af ens første antagelse. I denne situation antog Georg Cantor altså, at de reelle tal kunne tælles. Da de reelle tal er uendelig mange tal, så fokuserede han først udelukkende på de tal imellem 0 og 1. Han antog så, at alle decimaltallene imellem 0 og 1 kunne stilles op i rækkefølge - at de kunne få et værelse på Hilberts Hotel. Her er en række tilfældige decimaltal imellem 0 og 1:

Nr. 1: 0,23985 ...

Nr. 2: 0,53463 ...

Nr. 3: 0,96468 ...

Nr. n : 0, ... n ...

I denne rækkefølge skulle alle reelle tal imellem 0 og 1 gerne være, men Georg Cantor dannede så det helt nye decimaltal, d , ved at tage ét ciffer fra hvert af de opstillede decimaltal og gøre det nye decimaltals tilsvarende ciffer forskelligt:

d' s 1.ciffer $\neq$ Nr.1' s 1.ciffer
d' s 2.ciffer $\neq$ Nr.2' s 2.ciffer
d' s 3.ciffer $\neq$ Nr.3' s 3.ciffer
d' s n.ciffer $\neq$ Nr.n' s n.ciffer

Det nye decimaltal kunne fx. hedde $d=0,345 \dots$, og med dette decimaltal kunne Georg Cantor se at hans første antagelse om, at de reelle tal kunne tælles, er ugyldig i og med, at decimaltallet d ikke står i rækkefølgen. På denne måde fandt Georg Cantor frem til, at de reelle tal måtte have en større grad af uendelighed end de naturlige, og han opfandt derfor et nyt symbol for de reelle tals kardinalitet: c .

Georg Cantor var en glimrende matematiker, men desværre endte han sine dage med skiftevis tjekke ind og ud af diverse anstalter. Alligevel var det arbejde, han lavede så genialt og banebrydende, at det danner grundlag for nutidens matematik.

Figur 1:

	1	2	3	4	5	6	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	...
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	...
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Ovenstående billede illustrerer Georg Cantors bevis for en-til-en korrespondancen imellem brøker og naturlige tal. Han lod tælleren gå horisontalt i det uendelige og nævneren gå vertikalt i det uendelige. For at få skabt en-til-en korrespondancen, er man nødt til at gå diagonalt til værks, heraf navnet diagonalmetoden.

Læs mere om emnet i:

- Baktoft, Allan: *Videnskabsteori for ren matematik*. I: Natskyggen, 2010, Sektion: 8: Uendelighed, s. 28m-28m (Artikel)
- Brandt, Jørgen og Knud Nissen: *Q.E.D. - en introduktion til matematisk bevis*. 1. udg. ABACUS, 1997. (Bog)
- Mejlbo, Lars: *Om Det Uendelige*, Matematikkens Aspekter. 1. udg. Matematiklærerforeningen, 1991. (Bog)

Meta-opgavedel

Matematik er et sprog, som virker fjernet for mange. Der bliver ikke bragt mange artikler om matematik i de store aviser såsom Politiken, Jyllandsposten eller i tabloidaviserne, fordi deres modtagere ikke er interesseret i matematik. På den baggrund vælger jeg at skrive en populærvenskabelig artikel, idet målgruppen for en sådan artikel vil have stor interesse for matematik.

Artiklen kalder jeg "Uendeligheden", og det gør jeg, fordi det er et stærkt ord med meget kraft bag. Det fungerer som blikfang og er noget, som modtageren vil tænke over bagefter.

Artiklen indleder jeg med at appellere til modtagerens egen erfaringer med begrebet uendelig, for derefter at pirre modtagerens nysgerrighed med sætningen: "Men hvad *er* uendelighed så? Et tal? Et symbol? Kom med på rejsen og find ud af det.". Efter indledningen forklarer jeg så de matematiske begreber ved hjælp af æbler, kurve og fingre og uddyber selve begrebet uendelighed. Jeg afslutter artiklen med sætte i perspektiv til nutidens matematik og giver læseren muligheden for selv at læse videre om emnet vha. en "læs mere-boks" i stedet for et noteapparat.

Opgavens formål

Opgavens hovedformål er at docere, altså at formidle noget stof og på den måde belære modtageren¹. Jeg har forsøgt at få artiklen til at skabe forståelse for et abstrakt begreb på en overskuelig måde. Det er netop denne grad af abstrakthed, som læseren får indblik i, i artiklen.

Artiklens formidling

En populærvenskabsartikel er en artikel, som populært formidler noget stof til *alle*. Med alle mener jeg lystlæsere og lægfolk. Der skal være præsentation af tekster og illustrationer af pointer og påstande².

Artiklens udformning - de mange indgange

Artiklen skulle gerne være udformet på en måde, så læseren bliver lokket, før de overhovedet har læst teksten. Til dette har jeg benyttet principperne fra læserens scanner-læsning³:

Jeg har en trompet, som introducerer læseren til emnet og leder blikket videre til rubrikken. Til rubrikken har jeg benyttet funktionen "WordArt" til at give det et pænt udseende, som samtidig fanger læseren. I anslaget slår jeg temaet an og giver læseren et lille indblik i uendelighedens mange sider. Til at opdele brødteksten laver jeg mellemrubrikker, som visuelt indbyder læseren til at læse artiklen de steder, som måtte være interessante og relevante for læseren.

1: Borup, Helle: Ud med sproget. Side 67m

2: http://issuu.com/midtsjaellands-gymnasieskoler/docs/srp_ny-formidlingsopgaven_13_december_2009?mode=embed&layout=http://skin.issuu.com/v/color/layout.xml&backgroundColor=2A5083&showFlipBtm=true . Side 3

3: http://issuu.com/midtsjaellands-gymnasieskoler/docs/srp_ny-formidlingsopgaven_13_december_2009?mode=embed&layout=http://skin.issuu.com/v/color/layout.xml&backgroundColor=2A5083&showFlipBtm=true . Side 10

Fra læserens scanner-læsning kan jeg se, at det i høj grad er illustrationer og billeder, som læseren ser. Derfor vælger jeg at lave mange faktabokse med iøjnefaldende farver, og som kan læses uafhængigt af selve artiklen. På denne måde kan læseren få viden fra artiklen, uden rent faktisk at læse hele artiklen. Jeg bruger relevante billeder såsom billedet af Aristoteles og Hilberts Hotel, og alle faktabokse og billeder er desuden omhyggeligt valgt, så de ikke blot er fyldt uden formål. Alle disse udformningsovervejelser bygger grundlæggende på, at læseren skal have mange forskellige indgange til artiklen. Jeg fokuserer mest på indholdet i artiklen, og derfor er det layoutmæssige aspekt i artiklen ikke så fremtrædende, som det ellers ville være i Illustreret Videnskab.

Retoriske virkemidler

I artiklen er det vigtigt, at læseren ikke sidder og har mistro til, hvad jeg skriver. Derfor skal jeg opbygge min etos i forhold til læseren. Generelt kan man opbygge etos på tre måde:

1. At udvise viden og kompetencer
2. At være anstændig
3. At imødekomme læsere

Da læseren må formodes aldrig at have læst noget, jeg tidligere har skrevet og samtidig aldrig har mødt mig, så kan jeg ikke bruge punkt 2 til meget. Så hvis jeg vil opbygge min etos i forhold til den typiske læser af Illustreret Videnskab, kræver det, at mit sprog og formuleringer udstråler viden, overskud, og at jeg kender emnet ned i detaljer. Der må altså ikke være noget sted i artiklen, hvor mine formuleringer virker svage, udetaljerede eller usikre. Udover dette skal jeg være imødekommende i formuleringerne og gøre kommunikationen imellem læseren og jeg så jævnbyrdig som muligt. Dette er det sværeste, idet at kommunikationen er asymmetrisk til at begynde med. Jeg skriver om matematiske fakta, så på den måde bliver min artikel understøttet af hele matematikkens historie.

Man siger jo, at halvdelen af ens måltid bliver spist med øjnene. Den imaginære og emotionelle oplevelse af, at noget er pænt og flot, er altså af afgørende betydning. På samme måde kan man forestille sig, at halvdelen af artiklen bliver læst igennem de flotte billeder eller illustrationer. Dette er en appel til pathos, som jeg udnytter ved at bruge faktaboksene i forskellige farver og billederne på forsiden af de forskellige uendeligheder.

Om Illustreret Videnskab⁴ og deres læsere

Magasinet kendes for de ganske særligt udvalgt billeder og illustrationer, som forklarer komplekse sammenhænge på en nem og letforståelig måde. Magasinet har en helt særlig integration af tekst, billeder og illustrationer. Det er denne integration af tekst, billeder og illustrationer, som jeg benytter mig af i min artikel, fx ved illustrering af en mængde vha. æbler, eller ved at forklare

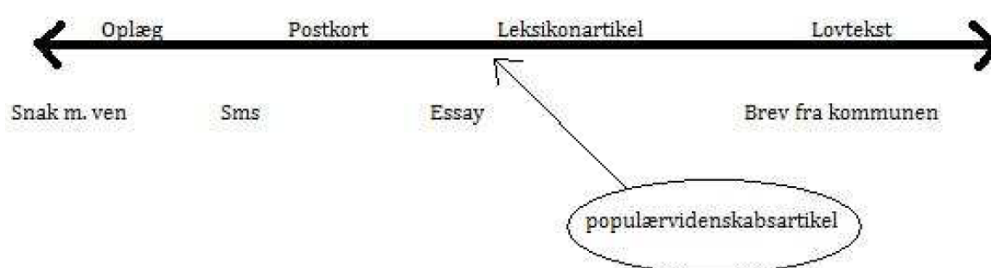
4: Illustreret Videnskab. Udgivet af Jens Henneberg. Internetadresse: <http://illvid.dk/om-illustreret-videnskab> - Besøgt d. 21.12.2010 (Internet)

letforståeligt, hvad en bijektion er vha. fingre.
Målgruppen er⁵:

- 2/3 mandlige læsere mellem 17 og 49 år
- Veluddannede
- Højere indkomst
- Teknologisk interesserede
- Rejser meget
- Kvalitetsbevidste

Sproget

Den sproglige udfordring i artiklen er, at jeg ikke skriver, som en matematiker ville skrive, men derimod som en journalist på Illustreret Videnskab ville skrive.



Ovenstående linje kaldes for Mundtlig-skriftlig-linjen⁶ og skal vise, hvor min artikel gerne skulle ligge. Forholdet imellem tale- og skriftsprog skal være 20:80, for på denne måde belærer artiklen modtageren i et forståeligt sprog. Man kan sige, at der skal være enkelte træk fra essay-genren og en del træk fra leksikonartikel-genren, for at artiklen fungerer optimalt.

Eksempelvis vælger jeg at skrive "en-til-en korrespondance" i stedet for det matematiske udtryk "bijektion". Dette vælger jeg, fordi en korrespondance er noget, som læseren vil kunne forstå og forholde sig til, i modsætning til en bijektion.

Fravalg

Logisk nok har jeg ikke været i stand til at skrive om alt det matematiske materiale i artiklen. Jeg har undladt store dele om emnet Kardinaltal, fordi jeg mener, at jeg har beskrevet, hvad kardinaltal og kardinalitet er kort og godt i artiklen.

Jeg undlader at skrive om det matematiske bevis for en uendelig kvotienttrækkes endelig sum. I stedet præsenterer jeg læseren for en kvotienttrække og giver derefter læseren den endelige sum. Til sidst i artiklen er Georg Cantors første diagonalbevis for de rationelle tals tællelighed blot illustreret med en kort forklaring. Dette skyldes, at jeg hellere vil fortælle læseren om det andet

5: http://issuu.com/midtsjaellands-gymnasieskoler/docs/srp_ny-formidlingsopgaven_13_december_2009?mode=embed&layout=http://skin.issuu.com/v/color/layout.xml&backgroundColor=2A5083&showFlipBtn=true. Side 4

6: Borup, Helle: Ud med sproget. Side 90

diagonalbevis for de reelle tals utællelighed, og derfor, af hensyn til læserens overblik, undlader at gå i dybden med det første bevis.

Konklusion

Der er nu blevet redegjort for begrebet uendelighed, heriblandt uendelige mængder, tællelig- og utællelig uendelighed, kardinaltal og mægtighed. Yderligere er der blevet gjort rede for paradokset om Achilleus og Skildpadden og Hilberts Hotel.

Der er meget at overveje i forbindelse med en populærvidenskabsartikel, og det kan gå meget galt, hvis man gør sig de forkerte overvejelser. Kommunikationsmetoder, layout og formuleringer er blot et lille udsnit af alle de områder, man skal gøre sig nogle overvejelser på.

Jeg ønsker at afslutte projektet ved at citere Gert Fosgerau fra bogen *Midt i Matematikken*:

”... fristes man til at spørge: Jamen, hvad *er* så matematik? Svaret må være: *Interessant og spændende*. (s. 35 linje 10-11)”, og på samme måde beskrive uendeligheden: interessant og spændende!

Litteraturliste

- Baktoft, Allan: *Videnskabsteori for ren matematik*. I: Natskyggen, 2010, Sektion: 8: Uendelighed, s. 28m-28m (Artikel)
- Kapitel 6, 7 og 8. Borup, Helle: I: Ud med sproget - Grundbog i retorik for gymnasiet og HF. 1. udg. Frydenlund, 2007. side 67-92. (Afsnit i bog)
- Brandt, Jørgen og Knud Nissen: Q.E.D. - en introduktion til matematisk bevis. 1. udg. ABA-CUS, 1997. (Bog)
- 6. time. Hansen, Andreas: I: Bliv journalist på syv timer. 1. udg. Dansk lærerforeningsforlag, 2010. side 98-101. (Afsnit i bog)
- Mejlbo, Lars: Om Det Uendelige, Matematikkens Aspekter. 1. udg. Matematiklærerforeningen, 1991. (Bog)
- Illustreret Videnskab. Udgivet af Jens Henneberg. Internetadresse: <http://illvid.dk/om-illustreret-videnskab> - Besøgt d. 21.12.2010 (Internet)
- issuu.com: SRP i stx med dansk som formidlingsfag. Udgivet af Bente og Flemming Christensen. Internetadresse: http://issuu.com/midtsjaellands-gymnasieskoler/docs/srp_ny-formidlingsopgaven_13_december_2009?mode=embed&layout=http://skin.issuu.com/v/color/layout.xml&backgroundColor=2A5083&showFlipBtn=true - Besøgt d. 21.12.2010 (Internet)

Yderligere har jeg fundet inspiration til opbygningen af den særfaglige opgaveløsnings enkelte dele i følgende materiale:

- Carstensen, Jens og Jesper Frandsen: MAT 2B. 1. udg. Systime, 1998. (Bog)
- Fosgerau, Gert og Finn H. Kristensen: Midt I Matematikken. 2. udg. KVAN, 1992. (Bog)
- Matematiklærerforeningen: Matematisk formelsamling stx A. 1. udg. Matematiklærerforeningen, 2007. (Bog)
- Mejlbo, Lars: Uendelighedens Paradokser, Matematikkens Aspekter. 1. udg. Matematiklærerforeningen, 1991. (Bog)